SISTEMAS DE MODULACIÓN CONTINUA: MODULACIÓN ANGULAR.

1.- MODULACIÓN ANGULAR

La modulación nace entre otras cosas de la necesidad de transportar una información a través de un canal de comunicación a la mayor distancia y menor coste posible.

Una portadora puede modularse de diferentes modos dependiendo del parámetro de la misma sobre el que se actúe.

$c(t) = A_c \cos \omega_c t$ Señal *portadora.*

La modulación angular resulta cuando el ángulo de fase de una onda sinusoidal varía con respecto al tiempo.

Como hemos visto, la modulación en amplitud, cumplía el principio de superposición, era por tanto una modulación LINEAL.

$$\alpha\, m_1 + \beta\, m_2 \longrightarrow \alpha\, g_1 + \beta\, g_2$$

La modulación angular NO CUMPLE el principio de superposición siendo por tanto una modulación NO-LINEAL.

Veámoslo con un ejemplo. Tenemos las siguientes señales;

$$m_1 \longrightarrow g_1 = A_c \cos f_1 (t)$$

$$m_2 \longrightarrow g_2 = A_c \cos f_2 (t)$$

Al sumar las señales mensajes y modular angularmente, tendríamos:

$$m_1 + m_2 \longrightarrow A_c \cos (f_1 + f_2) \neq A_c \cos f_1 + A_c \cos f_2$$

Por lo tanto es no lineal. El análisis de este tipo de sistemas va a ser mucho más complicado al menos a priori.

Los principales inconvenientes que podemos observar en la modulación angular son.

- Son más complejos.
- Son más caros.
- Tienen más ancho de banda.

La ventaja más importante de la modulación angular es su mayor inmunidad al ruido (en varios órdenes de magnitud frente a la modulación continua lineal).

2.- TIPOS DE MODULACIÓN ANGULAR.

Tenemos principalmente dos tipos de modulación angular:

- Modulación en frecuencia o FM.
- Modulación en fase o PM.

Supongamos una portadora del tipo:

$g_{ang}(t) = A_c \cos(\theta_i(t))$ *(coseno generalizado).*

En esta señal angular $g_{ang}(t)$, llamaremos *Fase Instantánea* a $\theta_i(t)$.

Si por ejemplo tenemos la señal

$g_{ang}(t) = A_c \cos(\omega_c t + \theta_o)$.

Observando esta señal podemos obtener la fase instantánea de $g_{ang}(t)$ que sería

$\theta_i(t) = \omega_c t + \theta_o$

Con lo cual, derivando y despejando en la ecuación obtenemos:

$$\omega_c = \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

Se habla entonces de *frecuencia instantánea* $\omega_i(t)$**:**

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

pudiendo obtener la *fase instantánea* $\theta_i(t)$ integrando en la frecuencia instantánea $\omega_i(t)$.

$$\theta_i(t) = \int_0^t \omega_i(t)dt + \theta_0$$

2.1.- SEÑAL PM O MODULADA EN FASE.

En las señales PM o modulación en fase la información está en la fase $\theta_i(t)$.

$$\theta_i(t) = \omega_c t + \underbrace{(k_p\, m(t) + \theta_o)}_{\text{información}} = \omega_c t + k_p\, m(t) + \theta_o$$

Siendo k_p la *Sensibilidad en fase* midiéndose ésta en [*rad/ volt*].

Por tanto, la forma general de las funciones moduladas en fase la obtenemos a partir de:

$$g_{ang}(t) = A_c \cos(\theta_i(t))$$

sustituyendo en la expresión:

$$\theta_i(t) = \omega_c t + k_p\, m(t) + \theta_0$$

obtenemos la señal PM

$$g_{PM}(t) = A_c \cos(\omega_c t + k_p m(t) + \theta_0)$$

2.2.- SEÑAL FM O MODULADA EN FRECUENCIA.

En las señales FM la información está lógicamente en la frecuencia $\omega_i(t)$.

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f\, m(t)$$

Podemos obtener la fase instantánea $\theta_i(t)$ como:

$$\theta_i(t) = \int_0^t (\omega_c + k_f m(t))dt + \theta_0 = \omega_c t + k_f \int_0^t m(t)dt + \theta_0$$

Siendo k_f el coeficiente de *Sensibilidad en frecuencia* midiéndose en [*Hz/ volt*]

Por tanto, la forma general de las funciones moduladas en frecuencia la obtenemos a partir de:

$$g_{ang}(t) = A_c \cos(\theta_i(t))$$

sustituyendo en la expresión:

$$\theta_i(t) = \omega_c t + k_f \int_0^t m(x)dx + \theta_0$$

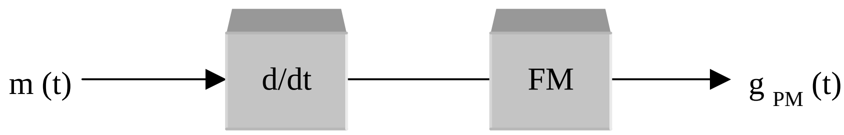
obtenemos la señal FM

$$g_{FM}(t) = A_c \cos(\omega_c t + k_f \int_0^t m(x)dx + \theta_0)$$

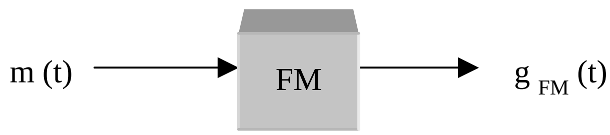
3.- GENERACIÓN DE UNA SEÑAL DE FM CON UN MODULADOR PM Y VICEVERSA. PARÁMETROS DE INTERÉS.

- Podemos fácilmente generar una señal FM a partir de un modulador PM de la siguiente manera:

- Podemos también generar una señal PM a partir de un modulador FM.



Como se puede ver las señales moduladas en fase (PM) y las señales moduladas en frecuencias(señales FM) son fácilmente intercambiables. Por lo tanto, centrándonos en el estudio de una de ellas (FM en nuestro caso) la otra viene de corrido.



$$g_{FM}(t) = A_c \cos(\omega_c t + k_f \int_0^t m(x)dx)$$

Para el estudio de las señales moduladas en frecuencia (señal FM) vamos a utilizar una señal mensaje monocromática (señal de un sólo tono).

$m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$ ⟵ *señal prueba*

$$\int_0^t m(x)dx = \frac{A_m}{\omega_m} sen\omega_m t$$

sustituyendo en g_{FM} (t) obtenemos

$$g_{FM}\left(t\right)=A_c\cos(\omega_c t+\frac{k_f A_m}{\omega_m}sen\omega_m t)$$

vemos que:

$$\theta_i(t)=\omega_c t+\frac{k_f A_m}{\omega_m}sen\omega_m t$$

y derivando

$$\omega_i\left(t\right)=\omega_c+k_f A_m\cos\omega_m t$$

como observamos según el coseno podremos obtener una frecuencia instantánea máxima($\omega_i\big|_{\max}$) y una frecuencia instantánea mínima($\omega_i\big|_{\min}$).

$$\omega_i\big|_{\max}=\omega_c+k_f A_m$$

$$\omega_i\big|_{\min}=\omega_c-k_f A_m$$

entonces

$$\omega_c+k_f A_m\geq\omega_i\left(t\right)\geq\omega_c-k_f A_m$$

$\Delta\omega = k_f A_m \equiv$ *Desviación en frecuencia*

La d*esviación en frecuencia* indica la máxima desviación posible de la frecuencia instantánea respecto de la portadora. No depende de la frecuencia de la señal mensaje pero sí de la amplitud.

Podemos hacer un estudio análogo para la fase:

$$\theta_i\left(t\right)=\omega_c t+\frac{k_f A_m}{\omega_m}sen\omega_m t$$

Igualmente tenemos:

$$\theta_i\big|_{\max}=\omega_c t+\frac{k_f A_m}{\omega_m}$$

$$\theta_i\big|_{\min}=\omega_c t-\frac{k_f A_m}{\omega_m}$$

Siendo ß, la *Desviación en fase,*

$$\beta=\frac{k_f A_m}{\omega_m}$$ sustituyendo $\Delta\omega = k_f A_m$

en la desviación en fase, obtenemos el *índice de modulación* $\frac{\Delta\omega}{\omega_m}$

$$\beta = \frac{k_f A_m}{\omega_m} \equiv \textit{Desviación fase} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m} \equiv \textit{Índice de modulación.}$$

La desviación en fase (ß) nos indica la máxima desviación que va sufrir la frecuencia respecto a la portadora. Como se observa, depende de la amplitud (A_m) y de la frecuencia (f_m) de la señal mensaje.

Dependiendo del valor de β podemos distinguir entre FM de banda estrecha y FM de banda ancha.

- $\beta \ll 1 \;\Rightarrow$ FM banda estrecha (típicamente ß << 0,3).
- $\beta \not\ll 1 \;\Rightarrow$ FM banda ancha..

4.- FM DE FM BANDA ESTRECHA.

Son aquellas señales en las que la desviación en fase (ß) es mucho menor que uno. Si por ejemplo tenemos la señal.

$$g_{FM}(t) = A_c \cos(\omega_c t + \beta.sen(\omega_m t)) =$$

$$= A_c \cos\omega_c t \cdot \cos(\beta \cdot \operatorname{sen}\omega_m t) - A_c \operatorname{sen}\omega_c t \cdot \operatorname{sen}(\beta \cdot \operatorname{sen}\omega_m t)$$

Al tomar β un valor muy pequeño, podemos aproximar:

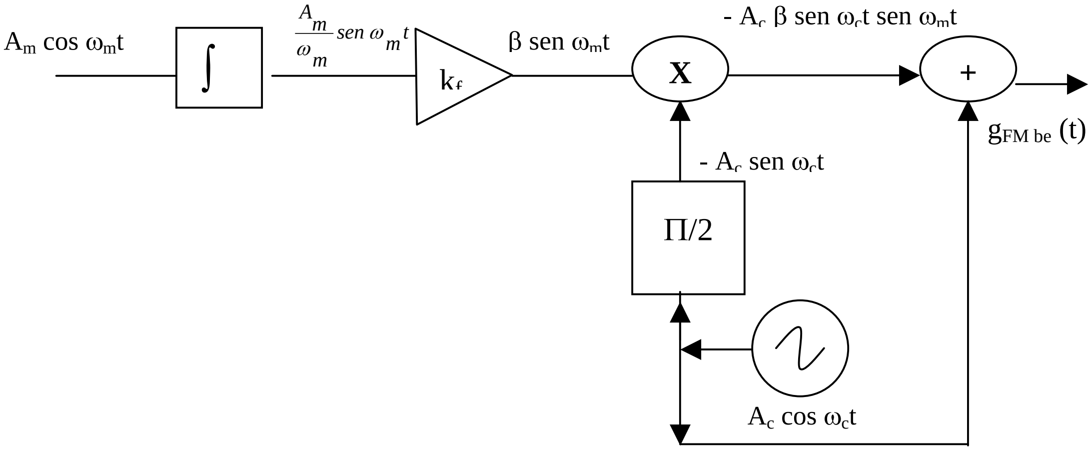
$$\cos[\beta \cdot \operatorname{sen}\omega_m t] \cong 1$$

$$\operatorname{sen}[\beta \cdot \operatorname{sen}\omega_m t] \cong \beta \cdot \operatorname{sen}\omega_m t$$

sustituyendo en la señal g_{FM} nos queda

$$g_{FM}(t) = A_c \cos\omega_c t - A_c\beta \cdot \operatorname{sen}\omega_m t \cdot \operatorname{sen}\omega_c t$$

$$g_{FM}(t) = A_c[\cos\omega_c t - \beta \cdot \operatorname{sen}\omega_m t \operatorname{sen}\omega_c t]$$



$$g_{FM(be)}(t) = A_c\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}^2 \omega_m t} + \left[\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}^2 \omega_m t}}\cos\omega_c t - \frac{\beta \operatorname{sen}\omega_m t}{\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}^2 \omega_m t}}\operatorname{sen}\omega_c t\right] =$$

$$= A_c\sqrt{1+\beta^2 sen^2\omega_m t}\cdot\left[\cos\varphi\cos\omega_c t - sen\varphi . sen\omega_c t\right] =$$

$$= A_c\left[1+\beta^2 sen^2\omega_m t\right]^{\frac{1}{2}}\cos(\omega_c t+\varphi) = g_{FM(be)}(t)$$

con $\varphi = arctag(\beta\cdot sen\omega_m t)$

Si nos fijamos podemos apreciar que la amplitud de la señal $g_{FM(be)}$ depende de la señal mensaje, y que guarda gran similitud con una señal modulada en amplitud (señal AM).

Aproximando, al ser β↓↓

- $1 + \beta^2 \operatorname{sen}^2 \omega_m t \approx 1$.
- Cos $\varphi \approx 1$; sen $\varphi \approx \varphi \approx \beta$ sen $\omega_m t$.

entonces:

$$g_{FM}(t) = A_c\left[\cos\omega_c t\cdot 1 - \operatorname{sen}\omega_c t\cdot\beta\cdot\operatorname{sen}\omega_m t\right]$$

como:

$$sen\alpha\cdot sen\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right]$$

sustituyendo en la expresión anterior:

$$g_{FM-be}(t) = A_c\cos\omega_c t + \frac{A_c\beta}{2}\left[\cos[(\omega_c+\omega_m)t] - \cos[(\omega_c-\omega_m)t]\right]$$

$$g_{FM-be}(t) = A_c\cos\omega_c t + \frac{A_c\beta}{2}\cos(\omega_c+\omega_m)t - \frac{A_c\beta}{2}\cos(\omega_c-\omega_m)t$$

Si nos fijamos en una señal AM-S

$$g_{AM-s}(t) = A_c(1+\mu\cdot\cos\omega_m t)\cos\omega_c t$$

$$g_{AM-S}(t) = A_c\cos\omega_c t + \frac{\mu\cdot A_c}{2}\cos(\omega_c+\omega_m)t + \frac{\mu\cdot A_c}{2}\cos(\omega_c-\omega_m)t$$

Observemos que en FM-$_{be}$ ß juega un papel análogo al de μ en señales AM-S, pero mientras que μ sólo depende del modulador, β depende ω_m y de A_m.

De esta expresión podemos ya deducir cual es el ancho de banda de la señal FM-$_{be}$, siendo éste análogo al de la señal AM-S.

$$BW = 2\ \omega_m$$

Existen algunos sistemas que básicamente lo que hacen es una transmisión en AM, pero con una pequeña variación o componente en FM-$_{be}$. Con esto llevamos información en fase y amplitud, de modo que cuando el ruido afecte a la amplitud, no afectará a la fase.

5.- FM DE BANDA ANCHA($\beta \not\ll 1$).

Son aquellas señales en las que la desviación en fase (ß) no es mucho menor que uno. Si tenemos la señal:

$$g_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta \cdot \operatorname{sen}(\omega_m t)]$$

y la señal prueba monocromática

$$m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$$

entonces

$$g_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta.sen(\omega_m t)]$$

$$= A_c \operatorname{Re}\left[\ e^{j(\omega_c t + \beta \operatorname{sen} \omega_m t)}\ \right]$$

La función

$\beta sen\ w_m\ t$ es periódica, de periodo $T = \dfrac{1}{f_m}$

por tanto $e^{j\beta \operatorname{sen}(\omega_m t)}$ será periódica del mismo periodo y, lógicamente desarrollable en series de Fourier de la forma

$$e^{j\beta \operatorname{sen} \omega_m t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{j \cdot n \cdot \omega_m t}$$

siendo

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\beta \operatorname{sen} \omega_m t} \cdot e^{-j \cdot n \cdot \omega_m t} dt =$$

$$= \frac{1}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j[\beta \operatorname{sen} \omega_m \, t - n\omega_m t]} dt = =$$

haciendo el cambio ω_m t = x

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \operatorname{sen} x - nx]} dx = J_n(\beta)$$

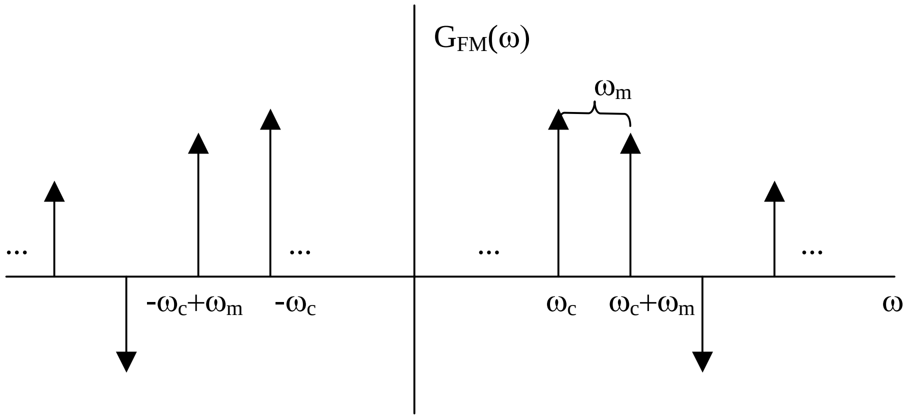
5.1.- FUNCIÓN BESSEL.

$J_n(\beta)$ es la *función Bessel* de primera especio de orden n y argumento β. De este modo:

$$g_{FM}(t) = A_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos(\omega_c + n\omega_m)t$$

Como indica esta expresión, tenemos la superposición de infinitos cosenos desplazados cada uno de ellos un múltiplo de la frecuencia mensaje ω_m. El espectro de la señal será un tren de deltas(δ), tal que.

$$Y(\omega) = A_c\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cdot[\delta(\omega - \omega_c - n\omega_m) + \delta(\omega + \omega_c + n\omega_m)]$$



5.1.1.- PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES BESSEL

1) $J_n(\beta) = (-1)^n J_{-n}(\beta)$ esto es:

   Si n es par

   $$J_n(\beta) = J_{-n}(\beta)$$

   Si n es impar

   $$J_n(\beta) = -J_{-n}(\beta)$$

2) Si β↓↓ ($\beta < 0{,}1$), se cumple que

   $$J_0(\beta) \cong 1$$

   $$J_1(\beta) \cong \frac{\beta}{2}$$

   $$J_n(\beta) \cong 0; \quad \text{con} \quad n > 1$$

3) Se cumple que

   $$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^{\,2}(\beta) = 1$$

El ancho de banda de la señal será por tanto infinito. También tenemos que recordar que esto es para señales de un sólo tono(señales monocromáticas). Sin embargo es evidente que la emisión de una sola señal no puede ocupar todo el espectro.

Cuando la señal mensaje no es monotóna la cosa se complica. Supongamos en principio una señal mensaje de dos tonos, por ejemplo:

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t) = A_{m1}\cos(\omega_{m1} t) + A_{m2}\cos(\omega_{m2} t)$$

Debido a la no linealidad sabemos que:

$$g_{FM}(t) \neq g_{FM1}(t) + g_{FM2}(t)$$

Realizando el estudio se tiene que:

$$g_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta_1 \operatorname{sen} \omega_{m1} t + \beta_2 \operatorname{sen} \omega_{m2} t]$$

donde

$$\beta_1 = \frac{k_f A_{m1}}{\omega_{m1}} \quad ; \quad \beta_2 = \frac{k_f A_{m2}}{\omega_{m2}}$$

Haciendo el mismo desarrollo se llega a:

$$g_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos[\omega_c t + (n\omega_1 + m\omega_2)t]$$

es decir, en el espectro vamos a tener deltas en ω_c y en cualquier frecuencia desplazada una cantidad $n\omega_1 + m\omega_2$ con n y m enteros.

Tabla y gráfica de las funciones Bessel de primera especie, orden n y argumento β, $J_n(\beta)$

n / β	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.0	1.0000										
0.5	.9384	.2422	.0306	.0025	.0001						
1.0	.7651	.4400	.1149	.0195	.0024	.0002					
1.5	.5118	.5579	.2320	.0609	.0117	.0017	.0002				
2.0	.2238	.5767	.3528	.1289	.0339	.0070	.0012	.0001			
2.5	-.0483	.4970	.4460	.2166	.0737	.0195	.0042	.0007	.0001		
3.0	-.2600	.3390	.4860	.3090	.1320	.0430	.0113	.0025	.0004		
3.5	-.3801	.1373	.4586	.3867	.2044	.0804	.0254	.0067	.0015	.0003	
4.0	-.3972	-.0660	.3641	.4301	.2811	.1320	.0490	.0151	.0040	.0009	.0001
4.5	-.3206	-.2310	.2178	.4247	.3484	.1947	.0842	.0300	.0091	.0024	.0005
5.0	-.1776	-.3276	.0465	.3648	.3912	.2611	.1310	.0533	.0184	.0055	.0014
5.5	-.0069	-.3415	-.1174	.2561	.3967	.3209	.1867	.0866	.0336	.0113	.0033
6.0	.1506	-.2767	-.2429	.1147	.3576	.3620	.2458	.1295	.0565	.0211	.0069
6.5	.2600	-.1539	-.3075	-.0354	.2748	.3735	.2999	.1801	.0880	.0365	.0132
7.0	.3000	-.0047	-.3015	-.1676	.1577	.3478	.3391	.2335	.1279	.0589	.0235
7.5	.2663	.1352	-.2303	-.2581	.0238	.2834	.3541	.2831	.1744	.0889	.0389
8.0	.1716	.2346	-.1130	-.2912	-.1054	.1857	.3375	.3205	.2234	.1263	.0607
8.5	.0419	.2731	.0223	-.2627	-.2077	.0671	.2866	.3375	.2693	.1694	.0894
9.0	-.0904	.2453	.1448	-.1810	-.2655	-.0551	.2043	.3274	.3050	.2148	.1246
9.5	-.1940	.1612	.2278	-.0654	-.2692	-.1614	.0993	.2867	.3232	.2577	.1650
10.0	-.2460	.0434	.2546	.0583	-.2197	-.2341	-.0145	.2167	.3178	.2918	.2074

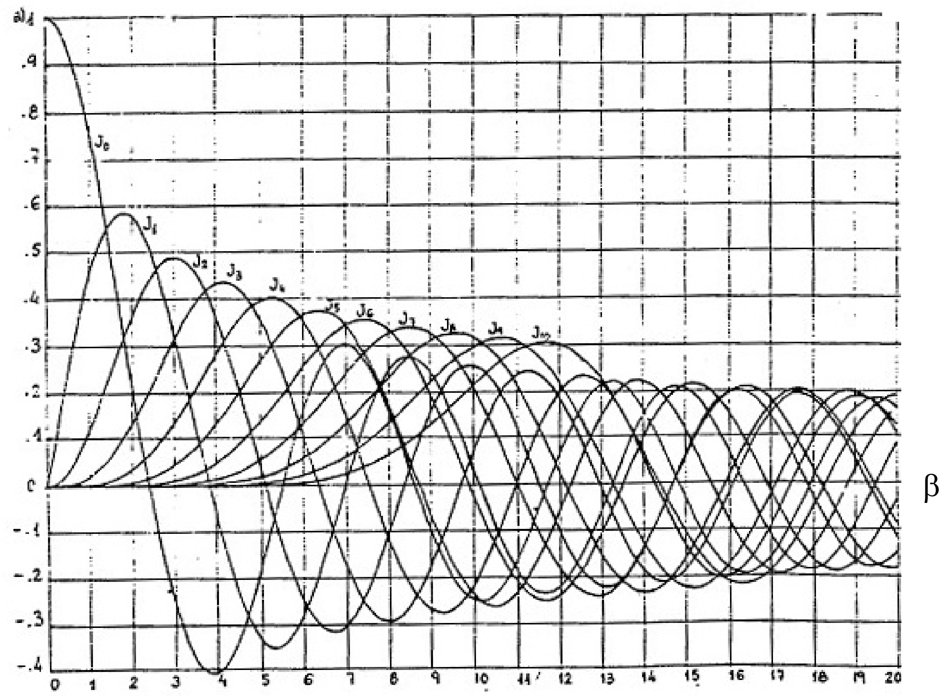


Figura 3.3:
Gráfica de las funciones de Bessel de primera especie en función del argumento β.

Veremos que limitando el espectro podemos mantener el 98 % o 99 % de la información.

Con una buena aproximación, podemos quedarnos con los primeros armónicos en el caso de FM de banda estrecha.

Si β << 1 entonces

$$\left.\begin{array}{l} J_0(\beta) \cong 1 \\ J_n(\beta) \cong 0 \end{array}\right\} \qquad BW = 2\omega_m$$

Para señales moduladas en frecuencia de banda ancha hay que tomar más armónicos. El criterio a la hora de limitar el BW va a depender, para una β determinada, de los valores tabulados de las funciones Bessel.

5.2.- POTENCIA DE UNA SEÑAL DE FM.

La potencia de una señal modulada en frecuencia será:

$$\text{Pot}_{\text{FM}} = \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta) = \frac{A_c^2}{2} =$$

$$= \frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_0^2(\beta) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_c^2}{2} J_n^2(\beta) = \frac{A_c^2}{2}$$

A la expresión $\frac{A_c^2}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_0^2(\beta)$ se le denomina *potencia de portadora* y está asociada al término $A_c \cdot J_0(\beta)\cos\omega_c t$, que no lleva información en la fase pero sí en la amplitud.

Definimos η como *eficiencia:*

$$\eta = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{A_c^2}{2} J_n^2(\beta)}{\frac{A_c^2}{2}} = \frac{1 - J_0^2(\beta)}{1}$$

Como nos quedamos con N armónicos, entonces la potencia será;

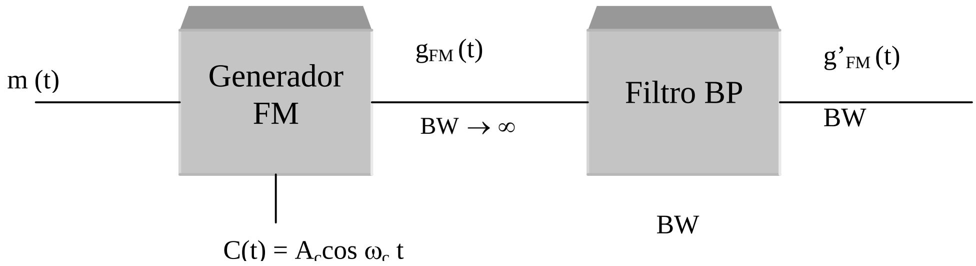
$$\text{Pot}_{FM} = \frac{A_c^{\,2}}{2}\sum_{n=-N}^{N} J_n^{\,2}(\beta) < \frac{A_c^{\,2}}{2}$$

Siendo

$$\eta = \frac{\displaystyle\sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} \frac{A_c^{\,2}}{2} J_n^{\,2}(\beta)}{\dfrac{A_c^{\,2}}{2}} = \sum_{\substack{n=-N \\ n\neq 0}}^{N} J_n^{\,2}(\beta)$$

5.3.- CRITERIOS DE SELECCIÓN DEL BW.

Para seleccionar el ancho de banda, existen varias técnicas, veremos tres:



Nos quedaremos con un porcentaje alrededor del 98% de la información de la señal g_{FM} (t).

<u>Método 1º: *Regla de Carlson*:</u>

Pot g'_{FM} (t) = 0'98 Pot g_{FM} (t)

Si g_{FM} (t) = $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cdot\cos(\omega_c + n\omega_m)\cdot t$

Entonces

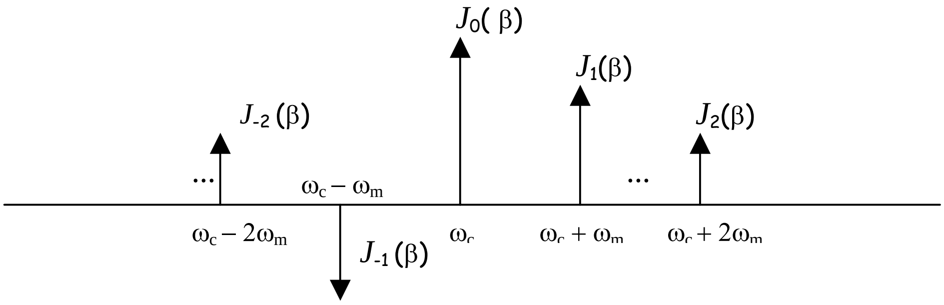
$$\text{Pot} = \frac{A_c^{\,2}}{2}$$

Con lo que,

$$g'_{FM}(t) = \sum_{n=-N}^{N} J_n(\beta)\cdot\cos(\omega_c + n\omega_m)\cdot t$$

siendo

$$\text{Pot} = \frac{A_c^{\ 2}}{2} \sum_{n=-N}^{N} J_n^{\ 2}(\beta)$$



$$\frac{g'_{FM}(t)}{g_{FM}(t)} = \sum_{n=-N}^{N} J_n^{\ 2}(\beta) = 0'98$$

Observando las tablas de los coeficiente de Bessel se comprueba que lo anterior es cierto siempre que,

$$\mathbf{N \leq \beta + 1}$$

Esto nos da el número de armónicos(N) que debemos tomar, lo cual nos va a determinar el ancho de banda(BW) del filtro a utilizar:

$$BW = 2\ N\ \omega_m \cong 2\ (\beta + 1)\ \omega_m$$

Si $\beta >>$ entonces $BW \cong 2\ \beta\ \omega_m$

Para la señal de prueba que como dijimos era una señal monocromática

$$\beta = \frac{k_f A_m}{\omega_m} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m}$$

siendo el BW $\approx 2\ \Delta\omega$

<u>Método 2º</u>

El número de armónicoS (N) se toma tal que la amplitud de las bandas laterales sea menor que el 1% de la portadora normalizada, esto es:

$$\left|J_{N\max}(\beta)\right| > 0'01 > \left|J_{N+1\ \max}(\beta)\right|$$

En este método no hay una regla general del tipo del criterio de Carlson. Hay que buscar en las tablas;

β	2 N_{max}
0.1	2
0.3	4
0.5	4
1	6
2	8
5	16
10	28
20	50
30	70

$$2\ N_{max} = \frac{BW}{\omega_m}$$

Así para β = 5
BW = 16 ω_m

Sin embargo según la regla de Carlson, para β = 5, BW = 2 (5 +1) ω_m = 12 ω_m
Este método es más restrictivo por tanto tendrá menos calidad.

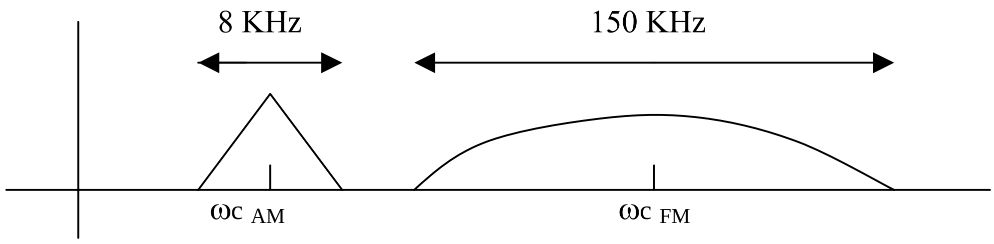
<u>Método 3º</u>

En realidad, comercialmente lo que se limita es la desviación en frecuencia siendo $\Delta f_{max} = 75$ KHz

Esto a su vez limita el ancho de banda BW = 2 $f_{máx}$ = 150 KHz.
El ancho de banda es pues, en el peor de los casos 150 KHz, pero va a depender del coeficiente K_f.

Este ancho de banda es considerablemente mayor que para las señales AM:

$$BW\Big|_{AM} \cong 8 \text{ KHz.}$$



Típicamente (para emisiones comerciales):

525 KHz < fc_{AM} < 1680 KHz

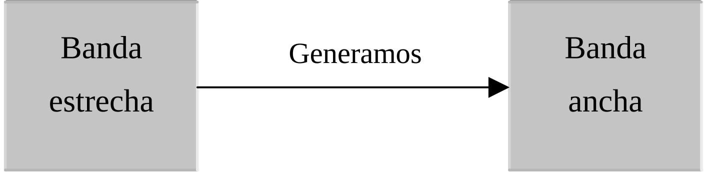
87'5MHz < fc_{FM} < 108 MHz

Evidentemente, desde el punto de vista de utilización de un sistema de comunicación, la emisión de señales de modulación en frecuencia es mucho peor (mayor necesidad de BW) que la de AM. Sin embargo tiene la gran ventaja de ser muy inmune al ruido.

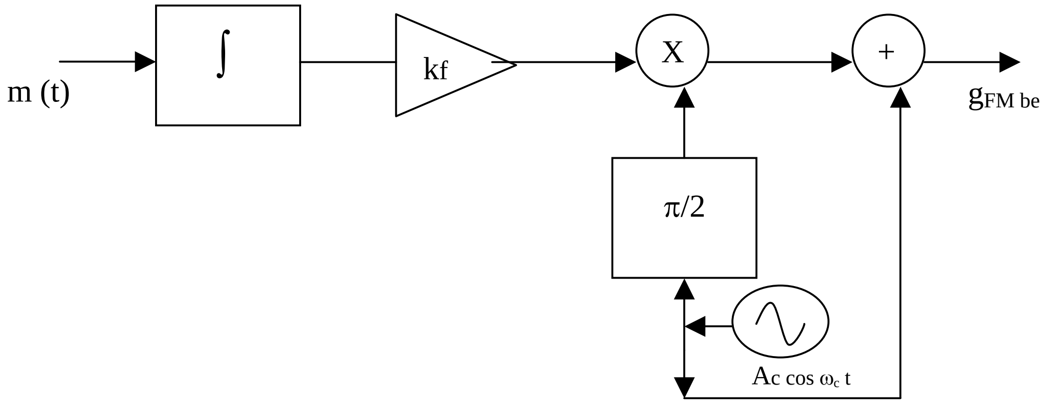
6.- MODULADORES FM.

6.1.- MÉTODO INDIRECTO.

Se utiliza un modulador FM o PM de banda estrecha para producir una señal modulada en frecuencia o en fase del índice que queramos.



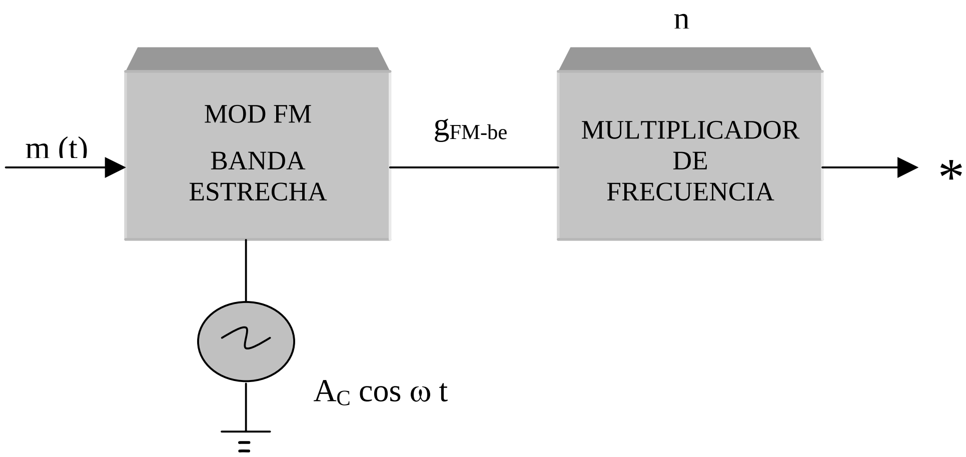
Recordemos como podíamos generar una señal de FM de banda estrecha:



Obviamente al ser de banda estrecha, se cumple que:

$$\beta = \frac{k_f \cdot A_m}{\omega_m} \ll 1$$

Para generar una señal de banda ancha hay que hacer un escalado



$$* \rightarrow \quad A_c \cos(n\omega_1 t + n\beta_1 \cdot sen(\omega_m t))$$

Aquí β << 1 pero $n\beta_1$ no tiene por qué serlo. Este es el "*Modulador de ARMSTRONG*" (1936).

A la salida del modulador FM de banda estrecha, tenemos:

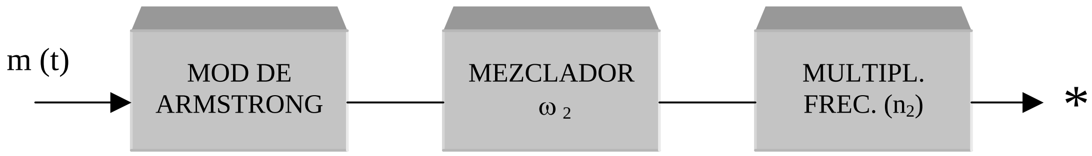
$$g_{FM-be}(t) = A_c \cos(\omega_1 t + k_f \int_0^t m(x)dx)$$

que para señales de un solo tono:

$$g_{FM-be}(t) = A_c \cos[\omega_1 t + \beta_1 \cdot \mathrm{sen}(\omega_m t)] \qquad \text{con } \beta << 1$$

En el multiplicador de frecuencia se escala el argumento del coseno, esto es, se multiplica dicho argumento por una cantidad “n”.

A partir del modulador de ARMSTRONG podemos seguir aumentando la complejidad



Al introducir la señal m (t) por el modulador de ARMSTRONG, a la salida obtendremos como se ha visto la señal

$$g_{FM}(t) = A_c \cos(n\omega_1 t + n\beta_1 \cdot sen(\omega_m t))$$

El mezclador realiza un desplazamiento en frecuencia:

$$g_{FM}(t) = A_c \cos((n\omega_1 - \omega_2) \cdot t + n\beta_1 \cdot sen(\omega_m t))$$

Por último, a la salida del multiplicador de frecuencia (n_2) obtenemos:

$$* \rightarrow \quad A_c \cos[(n\omega_1 - \omega_2) \cdot n_2 t + n \; n_2 \beta_1 \cdot sen(\omega_m t)\;]$$

De esta forma con $n\omega_1$ y ω_2 podemos tener el índice de modulación y la frecuencia de portadora que queramos.

Por ejemplo: Una señal de audio cuya frecuencia se encuentra en el siguiente rango

$$100 \text{ Hz} \leq \frac{\omega}{2\pi} \leq \underbrace{15 \text{ KHz}}_{\omega_m/2\pi}$$

Tenemos también que;

- $\beta_1 = 0.2$
- $\Delta f_{max} = 75$ KHz.
- $f_1 = \dfrac{\omega_1}{2\pi} = 100$ KHz
- $f_c = \dfrac{\omega_c}{2\pi} = 100$ MHz

Definimos a D como la *Razón de Desviación*, siendo D.

$$D = \frac{\Delta f_{max}}{f_{max}} = \frac{75KHz}{15KHz} = 5.$$

Este sería el índice de modulación de una señal de un sólo tono de frecuencia igual a la frecuencia máxima y que produce la máxima desviación en frecuencia.

Ahora tendríamos que seleccionar β.

Podríamos hacer que β = D = 5, o también podríamos hacer que la máxima desviación en frecuencia corresponda al tono más bajo. En nuestro caso:

$$\beta = \frac{75KHz}{100Hz} = 750$$

Tomando β = 750, ahora ajustaríamos los demás parámetros

$$\beta = 750 = n \cdot n_2 \cdot 0`2$$
$$100 \cdot 10^6\, Hz = \left(n \cdot 100 \cdot 10^3 - f_2\right) \cdot n_2$$

$n = 75$;

$n_2 = 50$;

$f_2 = 5'5$ MHz.

El método anterior quedó ya algo anticuado. Hoy día se utiliza el *método directo*, que veremos a continuación.

6.2.- MÉTODO DIRECTO.

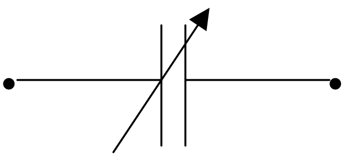
Producimos variaciones en la fase de un seno o un coseno según la amplitud, o variaciones en la amplitud de la señal mensaje m(t). Lo que estamos variando lógicamente es la frecuencia instantánea $\omega_i(t)$.

Cos ( )

m (t)

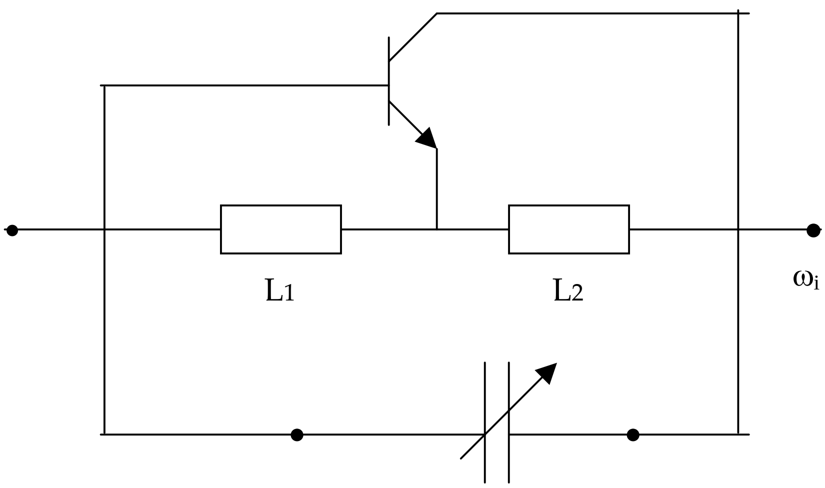
Esto se puede conseguir con un dispositivo llamado *Oscilador Controlado por Tensión* (VCO).

Ejemplo: Utilizando un dispositivo de capacidad variable “ VARICAP” (Diodo Varicap).



$$C(t) = C_0 + \Delta C \cdot \overline{m}(t)$$

Oscilador Hartley:



$$\omega_i(t) = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) \cdot C(t)}}$$

Si hacemos $\frac{\Delta C}{C_o} \cdot \overline{m}(t) <<$. Entonces

$$\omega_i(t) = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) \cdot C_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Delta C}{C_o} \cdot \overline{m}(t)}} \cong \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2) \cdot C_0}} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\Delta C}{C_o} \cdot \overline{m}(t) \right)$$

Luego

$$\omega_i(t) \cong \omega_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C_o}\overline{m}(t)\right)$$

$$\omega_i(t) \cong \omega_0 - \frac{\Delta C}{2 \cdot C_o} \cdot \omega_o \cdot \overline{m}(t)$$

Si definimos

$$K_f = -\frac{\Delta C}{2 \cdot C_o}$$

Nos queda la *frecuencia instantánea de la señal FM*

$$\omega_i(t) = \omega_o + K_f\,\overline{m}(t)$$

7.- DEMODULADORES FM.

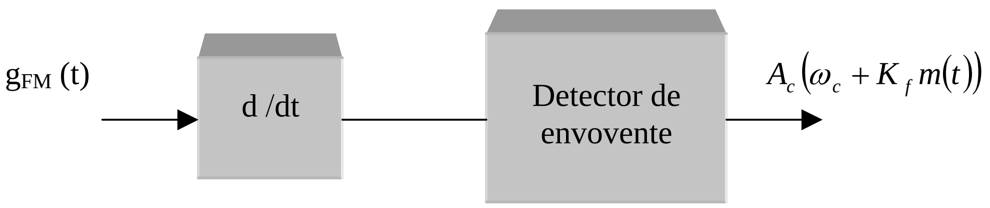
Es esta apartado veremos que con dispositivos ideales es fácil demodular señales moduladas en frecuencia.

Si tenemos

$$g_{FM}(t) = A_c \cdot \cos\left(\omega_c t + K_f \int_0^t m(x)dx\right)$$

$$\frac{dg_{FM}(t)}{dt} = -A_c\left[\omega_c + K_f m(t)\right] \cdot sen\left(\omega_c t + K_f \int_0^t m(x)dx\right)$$

De tal manera que si utilizamos un detector de envolvente:



- Se puede detectar sin problemas siempre que $\left(\omega_c + K_f m(t)\right) > 0$
- Puede resultar problemático hacer una buena diferenciación.
- Existe otro método que no veremos llamado "*discriminación en frecuencia*".