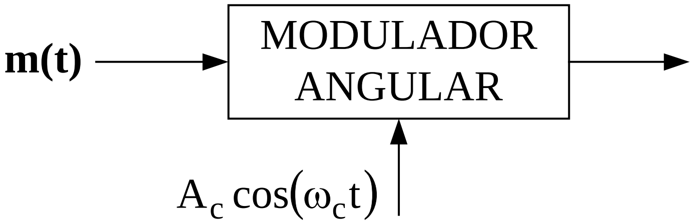
# MODULACIÓN ANGULAR: Definiciones Básicas




$$g(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] \quad \text{con} \quad \theta_i(t) = f[m(t)]$$

$\theta_i(t) \equiv$ **Fase Instantánea** ; $\omega_i(t) = \dfrac{d\theta_i(t)}{dt} \equiv$ **Frecuencia Angular Instantánea**

$$\theta_i(t) = \int_0^t \omega_i(t)dt + \theta_i(t=0) \;=\; \int_0^t \omega_i(t)dt \;\Rightarrow\; g_{MOD\,ANG}(t) = A_c \cos\left[\int_0^t \omega_i(t)dt\right]$$

**Modulación en Fase (PM):** $\theta_i(t) = \omega_c t + k_p m(t) \;\Rightarrow\;$ $K_p$ = Sensibilidad en fase del modulador $\left[\dfrac{\text{rad}}{\text{volt}}\right]$

$$g_{PM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + k_p m(t)]$$

**Modulación en Frecuencia (FM):** $\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t) \;\Rightarrow\;$ $K_f$ = Sensibilidad en frec. del mod. $\left[\dfrac{\text{rad}}{\text{seg volt}}\right]$

$$\theta_i(t) = \omega_c t + k_f \int_0^t m(t) \;\Rightarrow\; g_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + k_f \int_0^t m(t)\right]$$

# MODULACIÓN ANGULAR: Observaciones

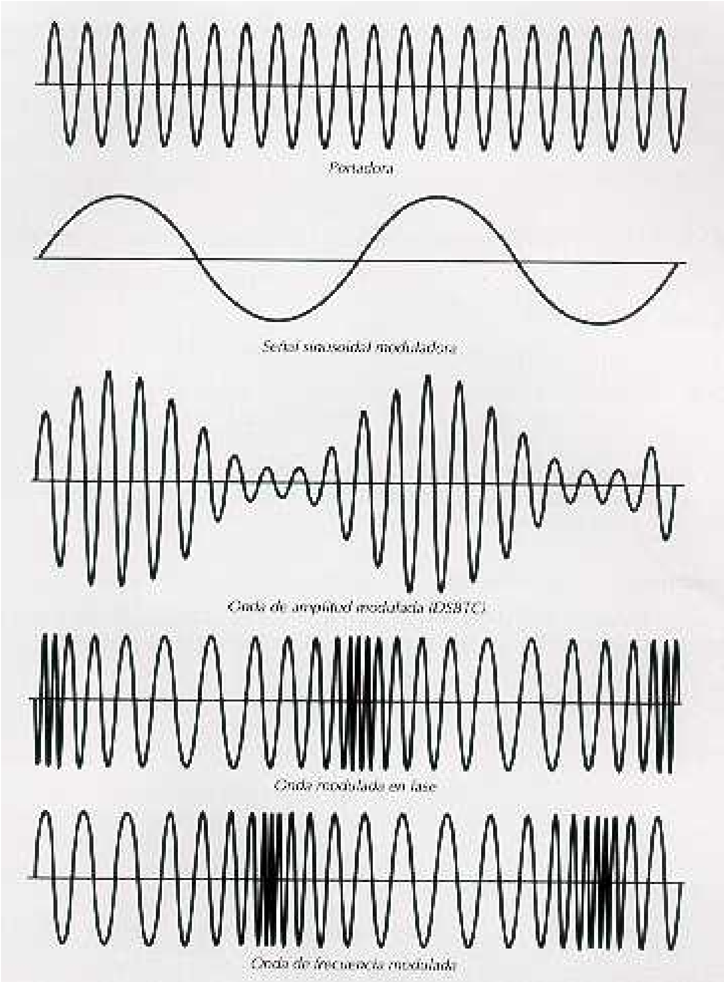
$$s(t) = A_c \cos(\omega_c t)$$

$$m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$$

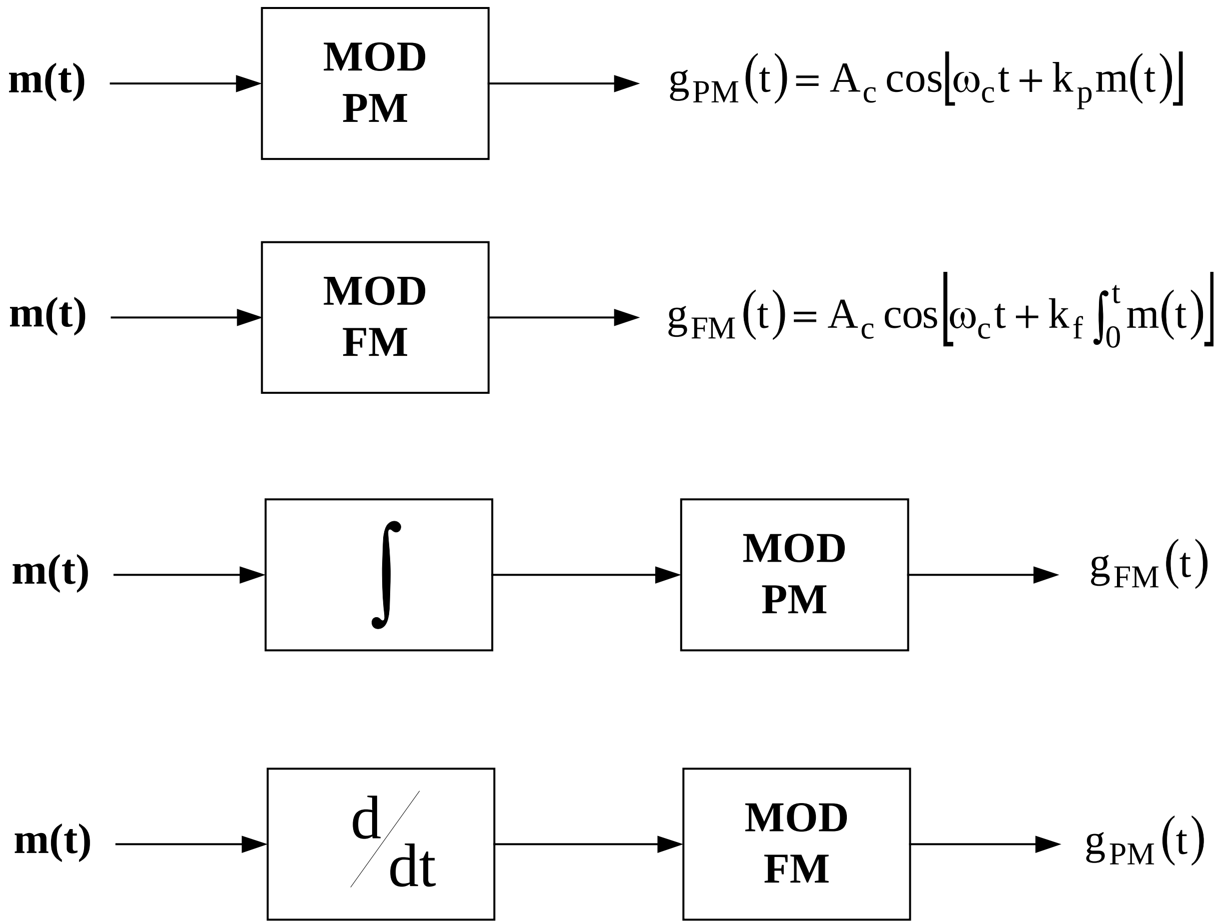
$$g_{AM-ST}(t) = A_c [1 + k_a m(t)] \cos(\omega_c t)$$

$$g_{PM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + k_p m(t)]$$

$$g_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + k_f \int_0^t m(t)\right]$$



# MODULACIÓN ANGULAR: Observaciones



## MODULACIÓN EN FRECUENCIA DE UN SOLO TONO: $m(t) = A_m \cos(\omega_m t)$

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f\, m(t) = \omega_c + k_f A_m \cos(\omega_m t) = \omega_c + \Delta\omega \cos(\omega_m t)$$

**Def.:** $\Delta\omega = k_f A_m \equiv$ **Desviación en frecuencia** $(\omega_c - \Delta\omega \le \omega_i \le \omega_c + \Delta\omega)$

$$\theta_i(t) = \int_0^t \omega_i(t)dt = \omega_c t + \Delta\omega \int_0^t \cos(\omega_m t)dt = \omega_c t + \frac{\Delta\omega}{\omega_m}\operatorname{sen}(\omega_m t) = \omega_c t + \beta \operatorname{sen}(\omega_m t)$$

**Def.:** $\beta = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_m} = \dfrac{k_f A_m}{\omega_m} \equiv$ **Desviación en fase o Índice de modulación de la señal FM** $(\omega_c t - \beta \le \theta_i \le \omega_c t + \beta)$

$$\begin{tikzcd}
m(t) = A_m \cos(\omega_m t) \arrow[r] & \boxed{\text{MODULADOR FM}} \arrow[r] & g_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta \operatorname{sen}(\omega_m t)] \\
 & A_c \cos(\omega_c t) \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ $\beta \ll 1$ $(\beta < 0.3) \Rightarrow$ **Modulación en frecuencia FM de banda estrecha**

$\Rightarrow$ Caso Contrario: $\beta$ NO es $\ll 1 \Rightarrow$ **Modulación en frecuencia FM de banda ancha.**

# MODULACIÓN EN FRECUENCIA DE BANDA ESTRECHA (FM-BE) ( $\beta << 1$ )

**Señal mensaje de un solo tono:** $m(t) = A_m \cos(\omega_m t) \Rightarrow g_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta \mathrm{sen}(\omega_m t)]$

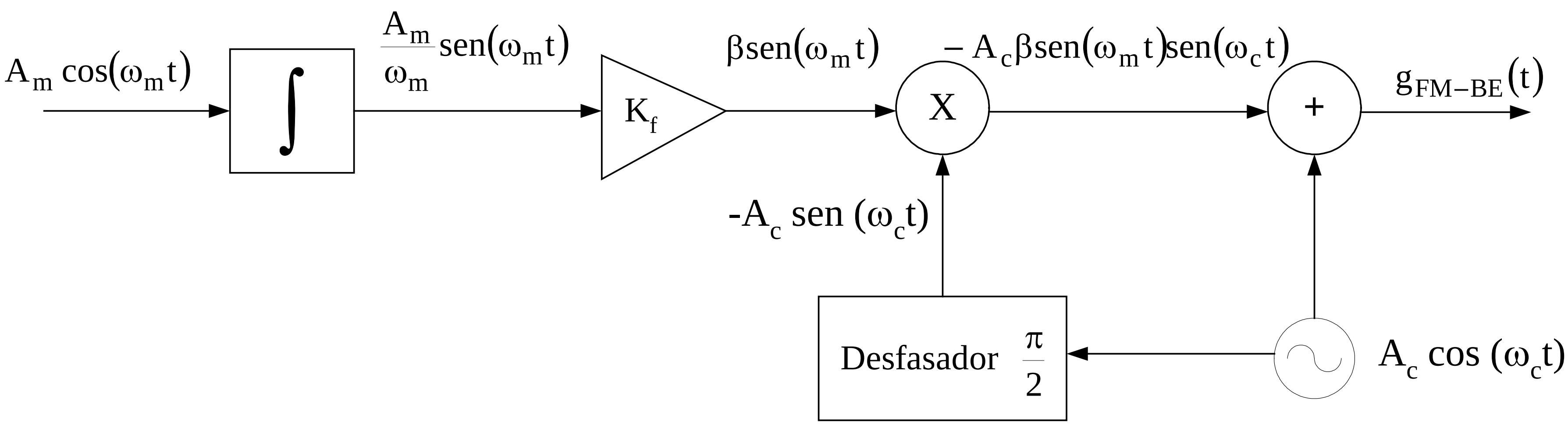
$$\beta << 1 \Rightarrow \mathrm{sen}[\beta \mathrm{sen}(\omega_m t)] \cong \beta \mathrm{sen}(\omega_m t) \quad \text{y} \quad \cos[\beta \mathrm{sen}(\omega_m t)] \cong 1$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \mathrm{sen}(a)\mathrm{sen}(b)$$

$$\Downarrow$$

$$g_{FM-BE}(t) = A_c[\cos(\omega_c t) - \beta \mathrm{sen}(\omega_m t)\mathrm{sen}(\omega_c t)]$$

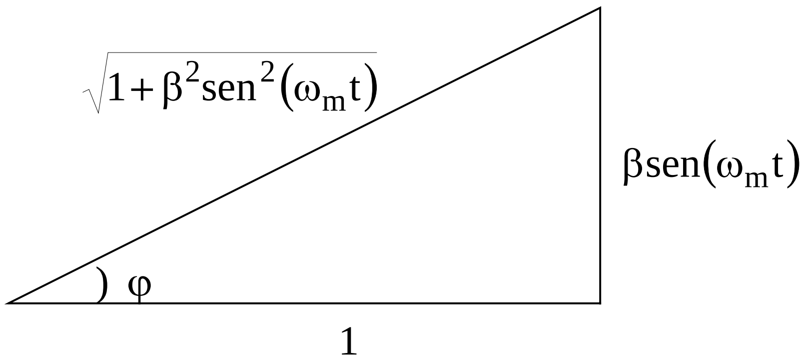
**Modulador FM de Banda Estrecha:**



# <u>CARACTERÍSTICAS SEÑAL FM DE BANDA ESTRECHA (FM-BE)</u> ( $\beta << 1$ )

$$\beta << 1 \Rightarrow g_{FM-BE}(t) = A_c\left[\cos(\omega_c t) - \beta \operatorname{sen}(\omega_m t)\operatorname{sen}(\omega_c t)\right]$$

**<u>1.- Semejanza con Señal AM:</u>** $g_{FM-BE}(t) = f(t, \text{ccas mensaje})\cos\left[\omega_c t + \varphi(t, \text{ccas mensaje})\right]$




$$\cos(\omega_c t + \varphi) = \cos(\omega_c t)\cos\varphi - \operatorname{sen}(\omega_c t)\operatorname{sen}\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}^2(\omega_m t)}} \qquad \operatorname{sen}\varphi = \frac{\beta \operatorname{sen}(\omega_m t)}{\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}^2(\omega_m t)}}$$

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\beta \operatorname{sen}(\omega_m t)}{1} \cong \beta \operatorname{sen}(\omega_m t) \quad (\beta << 1)$$

$$g_{FM-BE}(t) = A_c\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}(\omega_m t)}\left[\frac{1}{\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}(\omega_m t)}}\cos(\omega_c t) - \frac{\beta \operatorname{sen}(\omega_m t)}{\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}(\omega_m t)}}\operatorname{sen}(\omega_c t)\right] =$$

$$= A_c\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}(\omega_m t)}\left[\cos\varphi\cos(\omega_c t) - \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}(\omega_c t)\right] = A_c\sqrt{1+\beta^2 \operatorname{sen}(\omega_m t)}\ \cos(\omega_c t + \varphi)$$

# CARACTERÍSTICAS SEÑAL FM DE BANDA ESTRECHA (FM-BE) ( $\beta << 1$ )

## 1.- Semejanza con Señal AM:

$\Rightarrow$ $g_{FM-BE}(t) = A_c\left[\cos(\omega_c t) - \beta \operatorname{sen}(\omega_m t)\operatorname{sen}(\omega_c t)\right]$ **(** $\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta = -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$ **)**

$$g_{FM-BE}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_c\beta}{2}\left\{\cos[(\omega_c + \omega_m)t] - \cos[(\omega_c - \omega_m)t]\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{g_{FM-BE}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_c\beta}{2}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] - \frac{A_c\beta}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]}$$

$\Rightarrow$ $g_{AM-st}(t) = A_c\left[1 + \mu\cos(\omega_m t)\right]\cos(\omega_c t)$ $\left(\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]\right.$

$$g_{AM-st}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_c\mu}{2}\left\{\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \cos[(\omega_c - \omega_m)t]\right\}$$

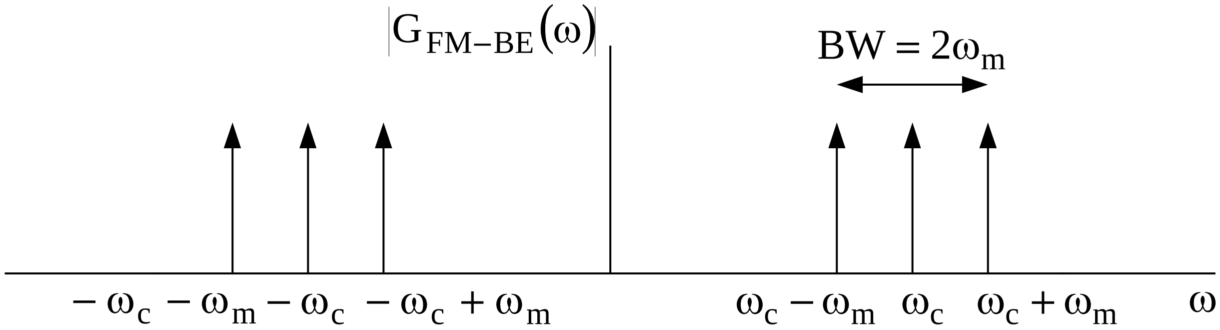
$$\Downarrow$$

$$\underline{g_{AM-st}(t) = A_c \cos(\omega_c t) + \frac{A_c\mu}{2}\cos[(\omega_c + \omega_m)t] + \frac{A_c\mu}{2}\cos[(\omega_c - \omega_m)t]}$$

# CARACTERÍSTICAS SEÑAL FM DE BANDA ESTRECHA (FM-BE) ( $\beta << 1$ )

## 2.- Ancho de Banda de la Señal FM-BE $\Rightarrow$ $\mathbf{BW_{FM\text{-}BE} = 2\,\omega_m}$

$$g_{FM-BE}(t) = A_c\left[\cos(\omega_c t) - \beta \operatorname{sen}(\omega_m t)\operatorname{sen}(\omega_c t)\right]$$




$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{k_f A_m}{\omega_m}$$

# MODULACIÓN EN FRECUENCIA DE BANDA ANCHA (FM) ( $\beta$ NO es $\ll 1$ )

**Si Señal mensaje de un solo tono:** $m(t) = A_m \cos(\omega_m t) \Rightarrow g_{FM}(t) = A_c \cos[\omega_c t + \beta \mathrm{sen}(\omega_m t)]$

$$g_{FM}(t) = A_c \,\mathrm{Re}\left[e^{\,j[\omega_c t + \beta \mathrm{sen}(\omega_m t)]}\right] = \mathrm{Re}\left[A_c\, e^{\,j\beta \mathrm{sen}(\omega_m t)}\, e^{\,j\omega_c t}\right] = \mathrm{Re}\left[\tilde{g}(t)\, e^{\,j\omega_c t}\right]$$

$\tilde{g}(t) = A_c\, e^{\,j\beta \mathrm{sen}(\omega_m t)}$ : Función Periódica de periodo $T_m = \dfrac{2\pi}{\omega_m}$ $\Rightarrow$ Desarrollable en Serie Compleja de Fourier.

$$\tilde{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G(n\omega_m)\, e^{jn\omega_m t} \text{ con } G(n\omega_m) = \frac{1}{T_m}\int_{-T_m/2}^{T_m/2} \tilde{g}(t)\, e^{-jn\omega_m t} dt = \frac{1}{T_m}\int_{-T_m/2}^{T_m/2} A_c\, e^{\,j\beta \mathrm{sen}(\omega_m t)}\, e^{-jn\omega_m t} dt$$

$$\omega_m t = x \;\Rightarrow\; dt = \frac{dx}{\omega_m} \text{ y si } t = \frac{T_m}{2} \rightarrow x = \omega_m \frac{T_m}{2} = \frac{2\pi}{T_m}\frac{T_m}{2} = \pi$$

$$G(n\omega_m) = \frac{A_c}{T_m \omega_m}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\,j\beta \mathrm{sen}x}\, e^{-jnx} dx = \frac{A_c}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\,j(\beta \mathrm{sen}x - nx)} dx = A_c\, J_n(\beta) \;\Rightarrow\; \tilde{g}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c\, J_n(\beta)\, e^{jn\omega_m t}$$

$$g_{FM}(t) = \mathrm{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c\, J_n(\beta)\, e^{jn\omega_m t}\, e^{\,j\omega_c t}\right] = \mathrm{Re}\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_c\, J_n(\beta)\, e^{\,j(\omega_c + n\omega_m)t}\right]$$

$\Rightarrow \quad g_{FM}(t) = A_c \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[(\omega_c + n\omega_m)t]$ (Expresión Genérica de la Señal FM de 1 sólo tono)

# MODULACIÓN EN FRECUENCIA DE BANDA ANCHA (FM) ( $\beta$ NO es $<<1$ )

**Señal mensaje de un solo tono:** $m(t)=A_m\cos(\omega_m t) \Rightarrow g_{FM}(t)=A_c\cos[\omega_c t+\beta \mathrm{sen}(\omega_m t)]$

$$\Downarrow$$

**Señal FM de 1 sólo tono para un valor arbitrario de $\beta$:** $g_{FM}(t)=A_c\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos[(\omega_c+n\omega_m)t]$

**Def.: Función de Bessel de 1ª clase de orden n y argumento $\beta$:** $J_n(\beta)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \,\mathrm{sen}x-nx]}\,dx$

Propiedades $J_n(\beta)$ :

1.- Simetría: $J_n(\beta)=(-1)^n \bullet J_{-n}(\beta) \Rightarrow$ si n par $: J_n(\beta)=J_{-n}(\beta)$ ; si n impar $: J_n(\beta)=-J_{-n}(\beta)$

2.- Si $\beta<<1 \Rightarrow J_0(\beta)\cong 1$ ; $J_1(\beta)\cong\dfrac{\beta}{2}$ ; $J_n(\beta)\cong 0$ para $n>1$

3.- $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^{\,2}(\beta)=1$

# FUNCIÓN DE BESSEL DE 1ª CLASE DE ORDEN n Y ARGUMENTO β

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j[\beta \,\mathrm{senx} - nx]}\,dx$$

| n / β | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 1.0000 | | | | | | | | | | |
| 0.5 | .9384 | .2422 | .0306 | .0025 | .0001 | | | | | | |
| 1.0 | .7651 | .4400 | .1149 | .0195 | .0024 | .0002 | | | | | |
| 1.5 | .5118 | .5579 | .2320 | .0609 | .0117 | .0017 | .0002 | | | | |
| 2.0 | .2238 | .5767 | .3528 | .1289 | .0339 | .0070 | .0012 | .0001 | | | |
| 2.5 | -.0483 | .4970 | .4460 | .2166 | .0737 | .0195 | .0042 | .0007 | .0001 | | |
| 3.0 | -.2600 | .3390 | .4860 | .3090 | .1320 | .0430 | .0113 | .0025 | .0004 | | |
| 3.5 | -.3801 | .1373 | .4586 | .3867 | .2044 | .0804 | .0251 | .0067 | .0015 | .0003 | |
| 4.0 | -.3972 | -.0660 | .3641 | .4301 | .2811 | .1320 | .0490 | .0151 | .0040 | .0009 | .0001 |
| 4.5 | -.3206 | -.2310 | .2178 | .4247 | .3484 | .1947 | .0842 | .0300 | .0091 | .0024 | .0005 |
| 5.0 | -.1776 | -.3276 | .0465 | .3648 | .3912 | .2611 | .1310 | .0533 | .0184 | .0055 | .0014 |
| 5.5 | -.0069 | -.3415 | -.1174 | .2561 | .3967 | .3209 | .1867 | .0866 | .0336 | .0113 | .0033 |
| 6.0 | .1506 | -.2767 | -.2429 | .1147 | .3576 | .3620 | .2458 | .1295 | .0565 | .0211 | .0060 |
| 6.5 | .2600 | -.1539 | -.3075 | -.0354 | .2748 | .3735 | .2999 | .1801 | .0880 | .0365 | .0132 |
| 7.0 | .3000 | -.0047 | -.3015 | -.1676 | .1577 | .3478 | .3391 | .2335 | .1279 | .0589 | .0235 |
| 7.5 | .2663 | .1352 | -.2303 | -.2581 | .0238 | .2834 | .3541 | .2831 | .1744 | .0889 | .0389 |
| 8.0 | .1716 | .2346 | -.1130 | -.2912 | -.1054 | .1857 | .3375 | .3205 | .2234 | .1263 | .0607 |
| 8.5 | .0419 | .2731 | .0223 | -.2627 | -.2077 | .0671 | .2866 | .3375 | .2693 | .1694 | .0894 |
| 9.0 | -.0904 | .2453 | .1448 | -.1810 | -.2655 | -.0551 | .2043 | .3274 | .3050 | .2148 | .1246 |
| 9.5 | -.1940 | .1612 | .2278 | -.0654 | -.2692 | -.1614 | .0993 | .2867 | .3232 | .2577 | .1650 |
| 10.0 | -.2460 | .0434 | .2546 | .0583 | -.2197 | -.2341 | -.0145 | .2167 | .3178 | .2918 | .2074 |

Tabla 3.1:
Valores de las funciones de Bessel de primera especie, orden $n$ y argumento $\beta$, $J_n(\beta)$

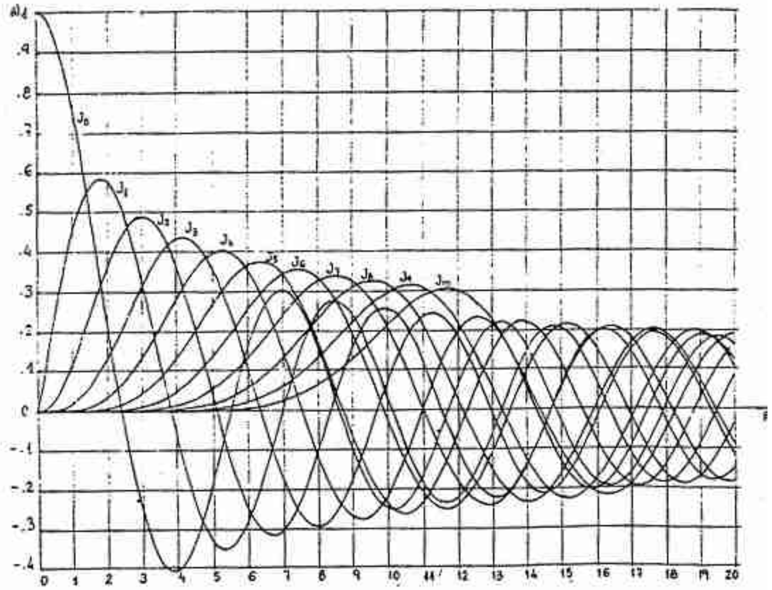


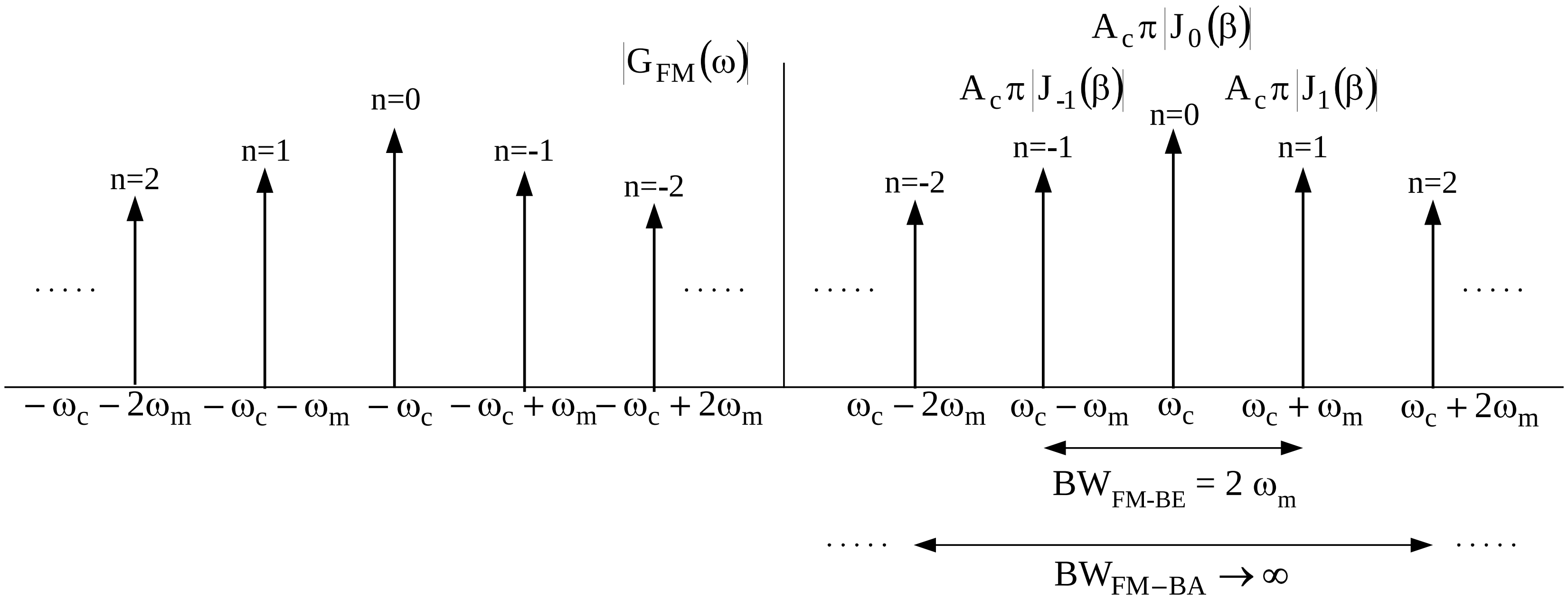
Figura 3.3:
Gráfica de las funciones de Bessel de primera especie en función del argumento $\beta$.

# CARACTERÍSTICAS SEÑAL FM DE BANDA ANCHA ( $\beta$ NO es $<<1$ )

$$g_{FM-1\ \text{sólo tono}}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos[(\omega_c + n\omega_m)t]$$

## 1.- Espectro y Ancho de Banda de la señal FM de 1 sólo tono:

$$G_{FM}(\omega) = A_c\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\{\delta[\omega-(\omega_c+n\omega_m)]+\delta[\omega+(\omega_c+n\omega_m)]\}$$




La amplitud de un armónico genérico n = Ac $\pi$ $J_n(\beta)$ (depende de $\beta$) $\Rightarrow$ Por lo general, el espectro se atenúa cuando n$\uparrow$, de forma que estas amplitudes $\to 0$ cuando $n \to \infty$ .

## <u>CARACTERÍSTICAS SEÑAL FM DE BANDA ANCHA</u> ( $\beta$ NO es $\ll 1$ )

$$g_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos[(\omega_c + n\omega_m)t]$$

**2.- Potencia Promedio de la señal FM de 1 sólo tono:**

$$P_{FM-1-SOLO-TONO} = \overline{\left\{A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\cos[(\omega_c + n\omega_m)t]\right\}^2} = \frac{A_c^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\beta)}{2} = \frac{A_c^2}{2}$$

**Observaciones:**

$\Rightarrow$ Potencia señal FM de un solo tono = Potencia señal portadora sin modular $A_c \cos(\omega_c t)$

$\Rightarrow$ Potencia repartida por todo el espectro de la señal.

$\Rightarrow$ Alta eficiencia de transmisión.

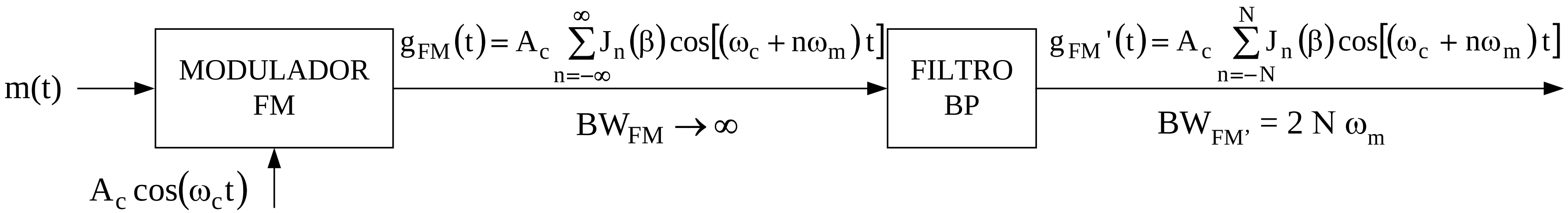
Ejemplo: Potencia necesaria para transmitir el armónico n=o de frecuencia de la portadora: $\frac{A_c^2 J_0^2(\beta)}{2}$

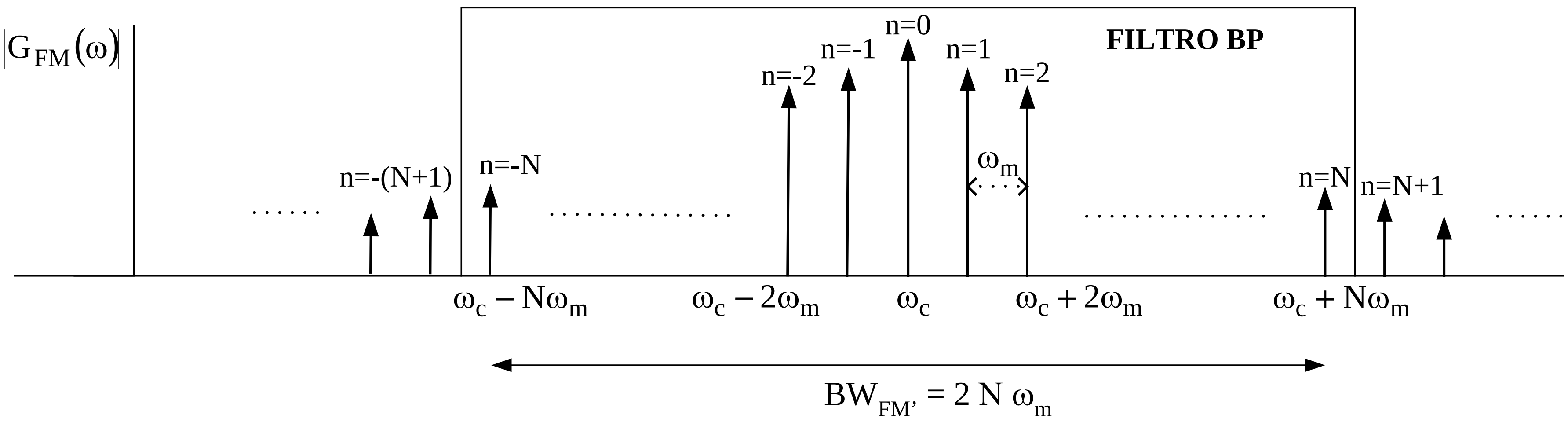
Nota: Para n=0: $g_{FM-n=0}(t) = A_c J_0(\beta)\cos(\omega_c t)$ $\rightarrow$ Se transmite la señal portadora a través de este término. En este caso, a diferencia con la señal AM-st, es un término que, aunque no lleva información de la señal mensaje en la fase, sí la lleva en su amplitud a través del índice de modulación $\beta$.

# ANCHO DE BANDA DE TRANSMISIÓN DE SEÑALES FM DE 1 SÓLO TONO

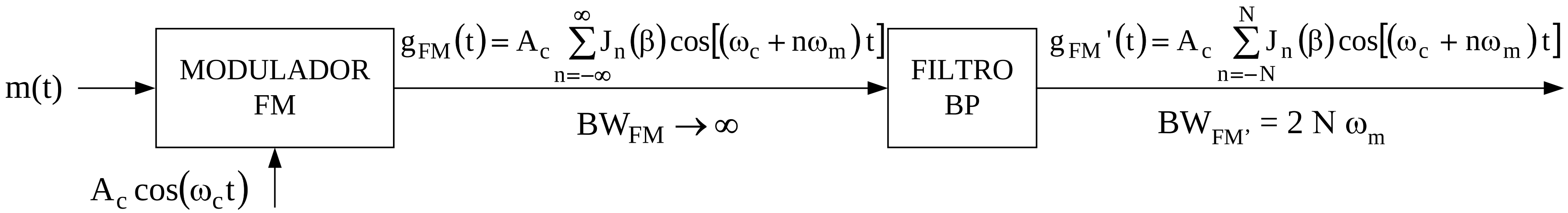
⇒ **Teoría:** $BW_{FM} \to \infty$: Espectro ilimitado formado por una componente en frecuencia a $\omega_c$ de la portadora y un nº infinito de frecuencias laterales localizadas simétricamente en ambos lados de $\omega_c$ ($\omega_c$ + n $\omega_m$).

⇒ **Práctica:** Limitar el BW filtrando únicamente un nº finito de armónicos representativos de la señal.



# CRITERIOS PARA LIMITAR EL BW DE TRANSMISIÓN DE SEÑALES FM




**<u>CRITERIO 1: REGLA DE CARSON:</u> La señal FM' debe mantener al menos el 98% de la potencia de la señal FM.**

$$P_{g_{FM'}(t)} = 0.98\ P_{g_{FM}(t)} \Leftrightarrow \frac{A_c^{\,2} \sum_{n=-N}^{N} J_n^{\,2}(\beta)}{2} = 0.98\,\frac{A_c^{\,2}}{2} \Leftrightarrow \sum_{n=-N}^{N} J_n^{\,2}(\beta) = 0.98$$

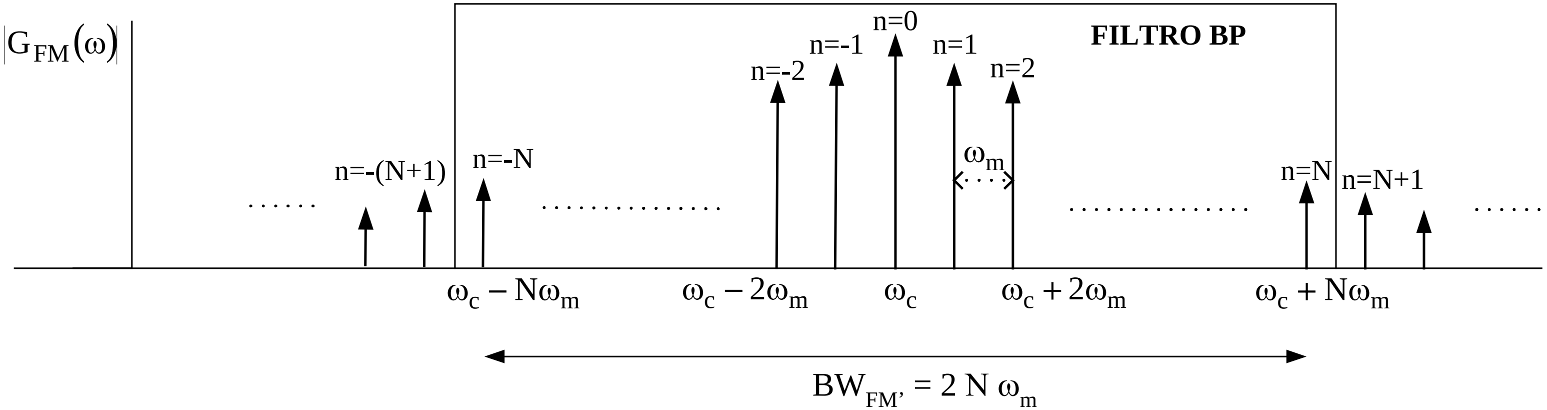
$$\text{Empíricamente: } N \le \beta + 1 \Rightarrow \underline{N = \beta + 1}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{BW = 2N\omega_m = 2(\beta+1)\,\omega_m} \to \text{Ancho de Banda de una señal FM según Criterio de Carson}$$

Observación: Si $\beta >> 1 \Rightarrow BW \cong 2\beta\omega_m = 2\Delta\omega = 2k_f A_m \to$ El BW de la señal FM únicamente depende de la señal mensaje de un sólo tono que se emite a través de su amplitud. ($N \approx \beta$)

# CRITERIOS PARA LIMITAR EL BW DE TRANSMISIÓN DE SEÑALES FM




Observación: En el espectro de la señal FM, la amplitud de un armónico de frecuencia $\omega_c$ + n $\omega_m$ es $A_c\pi J_n(\beta)$. Estas amplitudes se van atenuando a medida que n↑.

**CRITERIO 2: Se retienen el máximo número de frecuencias laterales significativas cuyas amplitudes sean todas mayores que el 1% de la amplitud del armónico correspondiente a la frecuencia $\omega_c$ de la señal portadora sin modular $\pi$Ac** $\Rightarrow \quad \pi A_c |J_N(\beta)| > 0.01\pi A_c > \pi A_c |J_{N+1}(\beta)| \quad \Leftrightarrow \quad |J_N(\beta)| > 0.01 > |J_{N+1}(\beta)|$

| $\beta$ | 2N ( = BW / $\omega_m$ ) |
|---|---|
| 0.1 | 2 |
| 0.3 | 4 |
| 0.5 | 4 |
| 1 | 6 |

| $\beta$ | 2N ( = BW / $\omega_m$ ) |
|---|---|
| 2 | 8 |
| 5 | 16 |
| 10 | 28 |
| 20 | 50 |

# CRITERIOS PARA LIMITAR EL BW DE TRANSMISIÓN DE SEÑALES FM

Comparación entre los 2 Criterios de Selección del BW:

Ejemplo: si $\beta = 5$:

$\Rightarrow$ Criterio 1: Regla de Carson

$$N = \beta + 1 = 6 \quad \Rightarrow \quad BW = 2N\omega_m = 12\omega_m$$

$\Rightarrow$ Criterio 2:

$$2N = 16 \quad \Leftrightarrow \quad N = 8 \quad \Rightarrow \quad BW = 2N\omega_m = 16\omega_m$$

$$\mathbf{N_{CRITERIO\ 1} < N_{CRITERIO\ 2} \quad \Leftrightarrow \quad BW_{CRITERIO\ 1} < BW_{CRITERIO\ 2}}$$

$$\Downarrow$$

**El criterio 2 deja pasar más armónicos y es más riguroso que el criterio 1**

# SEÑAL FM DE SEÑAL MENSAJE ARBITRARIA MULTITONO

**Def.: Señal Multitono:** Señal que consta de un grupo de ondas senoidales de frecuencias diferentes que pueden encontrarse o no relacionadas armónicamente.

**Señal FM para el caso de una señal mensaje de 2 tonos** (generalizable a una señal mensaje de n tonos)**:**

$$m(t) = m_1(t) + m_2(t) = A_{m1}\cos(\omega_{m1}t) + A_{m2}\cos(\omega_{m2}t)$$

$$\Downarrow$$

$$g_{FM}(t) = A_c\cos[\omega_c t + \beta_1 \mathrm{sen}(\omega_{m1}t) + \beta_2 \mathrm{sen}(\omega_{m2}t)]$$

$\beta_1 = \dfrac{\Delta\omega_1}{\omega_{m1}} = \dfrac{k_f A_{m1}}{\omega_{m1}}$ = Índice de Modulación del tono $\omega_{m1}$ ; $\beta_2 = \dfrac{\Delta\omega_2}{\omega_{m2}} = \dfrac{k_f A_{m2}}{\omega_{m2}}$ = Índice de Mod. del tono $\omega_{m2}$

$$\Downarrow$$

$$g_{FM}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_n(\beta_1) J_m(\beta_2) \cos[(\omega_c + n\omega_{m1} + m\omega_{m2})t]$$

$$\Downarrow$$

Espectro ilimitado formado por una componente en frecuencia a $\omega_c$ de la portadora y un nº infinito de frecuencias laterales localizadas simétricamente en ambos lados de $\omega_c$, $\omega_c + (n\omega_{m1} + m\omega_{m2})$

# BW DE UNA SEÑAL FM DE SEÑAL MENSAJE ARBITRARIA MULTITONO

**Observaciones:**

⇒ Cada tono tendrá su BW particular mínimo para ser transmitido. Si, por ejemplo, se utiliza el Criterio de Carson para definirlo:

$$BW_{TONO\ A_m\cos(\omega_m t)} = 2N\omega_m = 2(\beta+1)\omega_m = 2\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_m}+1\right)\omega_m = 2\left(\frac{k_f A_m}{\omega_m}+1\right)\omega_m = 2k_f A_m + 2\omega_m$$

⇒ Cuanto mayor sea la amplitud $A_m$ y frecuencia $\omega_m$ del tono, mayor será su BW de transmisión.

⇒ El BW necesario para la transmisión de una señal FM generada mediante una señal mensaje multitono tiene que englobar a todos los BW correspondientes a cada uno de los tonos a transmitir.

⇒ Este BW de la señal FM "mínimo requerido" se establece escogiendo la máxima amplitud posible ($A_{m\,max}$) y frecuencia ($\omega_{m\,max}$) de todos los tonos que componen la señal mensaje.

**<u>Def.: Razón de Desviación:</u>** $D = \dfrac{\Delta\omega}{\omega_{m\,max}}$ , con $\Delta\omega = k_f A_{m\,max}$.

Juega el papel de β en señales FM multitono para definir y limitar el BW**:**

$$BW_{CRITERIO\ 1\,(REGLA\ DE\ CARSON)} = 2N\omega_{m\,max} = 2(D+1)\omega_{m\,max}$$

$BW_{CRITERIO\,2} = 2N\omega_{m\,max}$ , donde 2N se extrae para el valor de D correspondiente de las tablas.

# BW DE UNA SEÑAL FM: MODULADORES FM comerciales

$\Rightarrow$ $\Delta f_{max} = 75\ \text{KHz}$ $\left(\Delta\omega = 2\pi\,\Delta f\right)$ (Se limita la amplitud de los tonos de la señal mensaje: $\Delta\omega_{max} = k_f\,A_{m\,max}$)

$\Rightarrow$ $f_{max} = 15\,\text{KHz}$ $\left(\omega_m = 2\pi\,f_m\right)$ (Rango de frec. típicos en transmisión FM: $f_m \in \left[50\ \text{Hz}\ ,\ 15\,\text{KHz}\right]$)

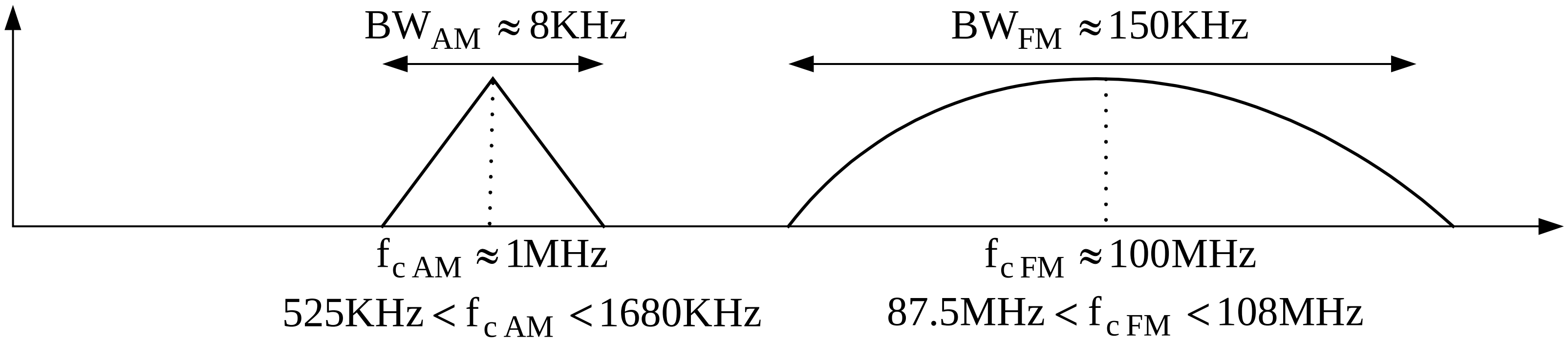
$$\Downarrow$$

$$D = \frac{\Delta\omega_{max}}{\omega_{m\,max}} = \frac{\Delta f_{max}}{f_{m\,max}} = \frac{75\,\text{KHz}}{15\,\text{KHz}} = 5$$

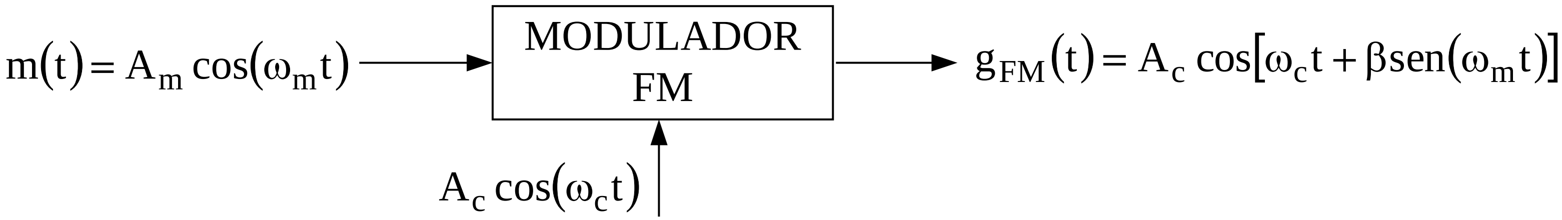
$$\Downarrow$$

$$BW_{FM\ (\text{REGLA DE CARSON})} = 2x6x15\text{KHz} = 180\ \text{KHz} \quad ; \quad BW_{FM\ (1\%)} = 2x8x15\ \text{KHz} = 240\text{KHz}$$

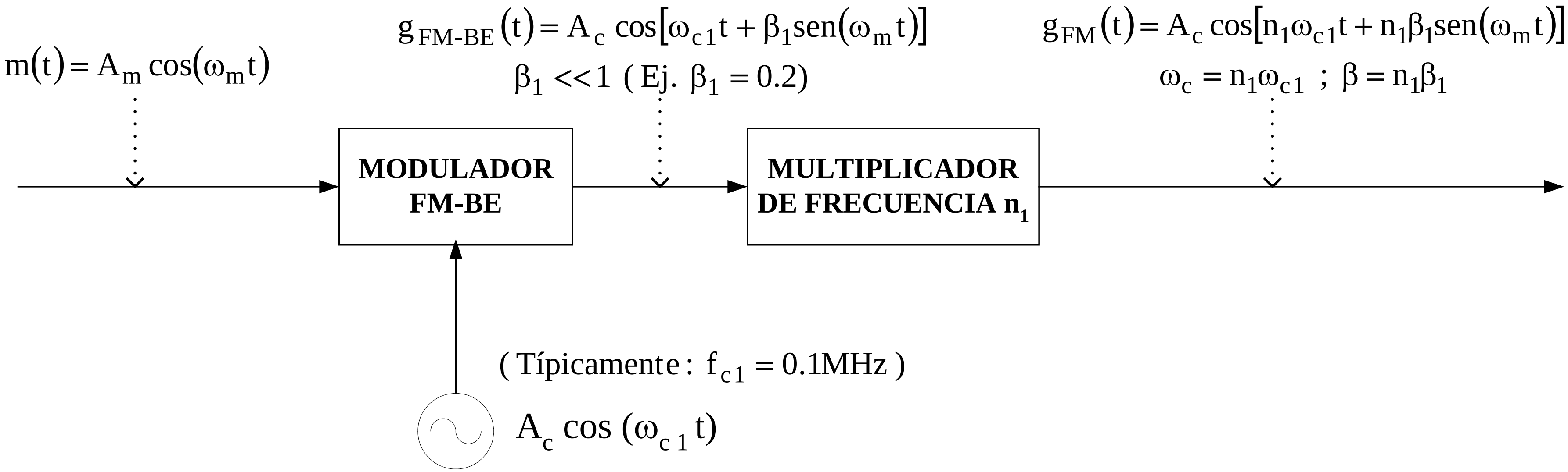
$$BW_{\text{TÍPICO FM}} \approx 150\ \text{KHz}$$



# MODULADORES FM: MÉTODO INDIRECTO ( $g_{FM\text{-}BE}(t) \Rightarrow g_{FM\text{-}BA}(t)$ )




## MODULADOR ARMSTRONG



# MODULADORES FM: MÉTODO INDIRECTO ( $g_{FM\text{-}BE}(t) \Rightarrow g_{FM\text{-}BA}(t)$ )

**VALORES TÍPICOS UTILIZADOS EN EL MODULADOR DE ARMOSTRONG:** Su modulador FM-BE se alimenta con una portadora $f_{c1} = 0.1\text{MHz}$ y genera una FM-BE de índice de modulación $\beta_1 << 1$, por ejemplo $\beta_1 = 0.2$.

**INSUFICIENCIA MODULADOR ARMOSTRONG PARA SATISFACER LAS NECESIDADES DE LOS TRANSMISORES FM COMERCIALES** $\Rightarrow$ Transmisión de señales de audio $f_m \in [50\text{ Hz} \ , \ 15\text{ KHz}]$ con frecuencia de portadora $f_c \approx 100\text{MHz}$ y desviación de frecuencia máxima permitida $\Delta f = 75 \ \text{KHz}$.

Ejemplo: Para la emisión de un tono de 100 Hz:

$$\Delta f = 75 \ \text{KHz} \ \Rightarrow \ \beta_{\text{TONO 100Hz}} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{75\text{ KHz}}{100\text{ Hz}} = 750$$

$$\Downarrow$$

Habría que multiplicar en frecuencia por $n_1 = 3750$ ( $\beta = n_1\beta_1 \ \Leftrightarrow \ n_1 = \frac{\beta}{\beta_1} = \frac{750}{0.2} = 3750$ )

$$\Downarrow$$

La frecuencia de la portadora de la FM generada sería de 375 MHz (>> 100MHz típicos)

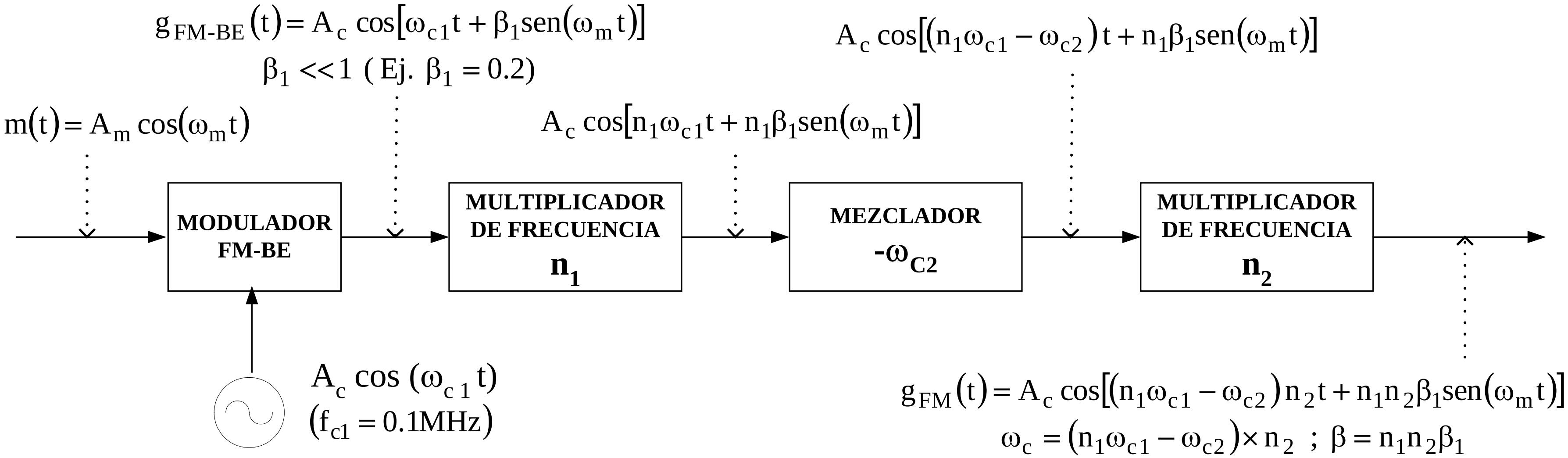
( $f_c = n_1 f_{c1} = 3750 \times 0.1\text{MHz} = 375\text{MHz}$ )

$$\Downarrow$$

No podemos generar una señal FM de $f_c$ y $\beta$ adecuados que permita la transmisión de todos los tonos $f_m \in [50\text{ Hz} \ , \ 15\text{ KHz}]$ (Con un único $n_1$ habría que satisfacer dos condiciones: $f_c = n_1 f_{c1}$ y $\beta = n_1\beta_1$ )

# MODULADORES FM: MÉTODO INDIRECTO ( $g_{FM\text{-}BE}(t) \Rightarrow g_{FM\text{-}BA}(t)$ )

**SOLUCIÓN: Multiplicador de frecuencia de dos etapas con una etapa intermedia de traslación de frecuencia.**




Ejemplo Anterior: para la emisión de un tono de 100 Hz:

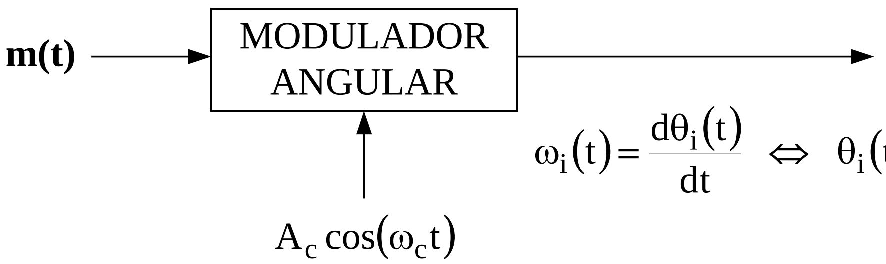
$$\Delta f = 75 \text{ KHz} \Rightarrow \beta_{\text{TONO 100Hz}} = \frac{\Delta\omega}{\omega_m} = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{75\text{ KHz}}{100\text{ Hz}} = 750 = n_1 n_2 \beta_1 = 0.2\, n_1 n_2 \Leftrightarrow n_1 n_2 = 3750$$

$$f_c = (n_1 f_{c1} - f_{c2}) \times n_2 = 100\text{ MHz} \Rightarrow \text{Si } f_{c1} = 0.1\text{MHz} \text{ y } f_{c2} = 5.5\text{MHz} \Rightarrow (0.1 n_1 - 5.5) \times n_2 = 100$$

$$\Downarrow$$

$$n_1 = 75 \text{ y } n_2 = 50$$

# MODULADORES FM: MÉTODO DIRECTO

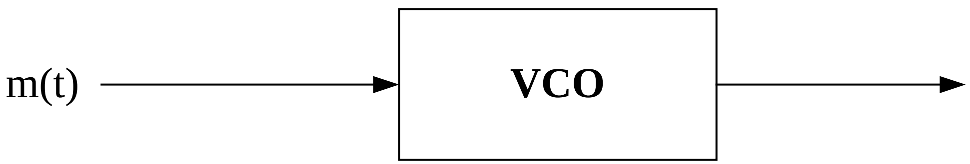



$$g(t) = A_c \cos[\theta_i(t)] \quad \text{con} \quad \theta_i(t) = f[m(t)]$$

$$\omega_i(t) = \frac{d\theta_i(t)}{dt} \Leftrightarrow \theta_i(t) = \int_0^t \omega_i(t)dt \Rightarrow g(t) = A_c \cos(\theta_i(t)) = A_c \cos\left[\int_0^t \omega_i(t)dt\right]$$

**Def.: OSCILADOR CONTROLADO POR TENSIÓN (VCO):** Dispositivo capaz de hacer variar la fase instantánea de una señal senoidal de acuerdo a las variaciones en el tiempo de la señal de entrada

- En un sistema modulador FM directo, la frecuencia instantánea de una señal senoidal se varía de forma directa de acuerdo con la señal banda base m(t) según $\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t)$ .




$$g_{FM}(t) = A_c \cos(\theta_i(t)) = A_c \cos\left[\int_0^t \omega_i(t)dt\right]$$

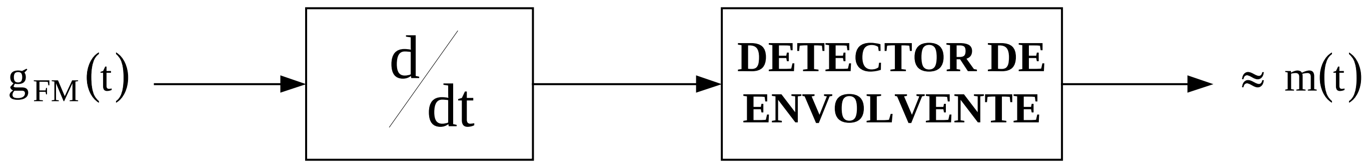
$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f m(t)$$

Ejemplo de VCO para generar señal FM: Oscilador Hartley.

# DEMODULADORES FM

- DEMODULADOR FM POR DIFERENCIACIÓN

$$g_{FM}(t) = A_c \cos\left[\omega_c t + k_f \int_0^t m(t)\right] \Rightarrow \frac{d\, g_{FM}(t)}{dt} = -A_c \left[\omega_c + k_f\, m(t)\right] \mathrm{sen}\left[\omega_c t + k_f \int_0^t m(t)\right]$$




**Problemas:** Sobremodulación y Diferenciación

- DISCRIMINADOR DE FRECUENCIAS
- SINCRONIZACIÓN DE FASE (Utiliza Dispositivos PLL – “Phase Locked Loop - bucles atrapadores de fase)