

Examen Final de Ampliación de Matemáticas
Convocatoria de Diciembre
Segundo Curso de I.T. Informática (Sistemas)
13 de Diciembre de 2003

1. [2 Puntos] Dada la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0). \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

Estudiar:

- (a) Su continuidad y diferenciabilidad.
 (b) Comprobar que $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$.
 (c) Estudiar la continuidad de $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ en el origen. ¿ Se cumple las hipótesis del teorema de Schwartz?.
2. [2 Puntos] Hallar el volumen de la región sólida limitada superiormente por el paraboloides $z = 1 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1 - y$.
3. (a) [1 Punto] Resolver la siguiente ecuación diferencial $y' + ytg(x) + sen(x) = 0$
 (b) [1'5 Puntos] Resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales utilizando la transformada de Laplace

$$\begin{aligned} x'(t) &= & - & y(t) \\ y'(t) &= 2x(t) & + & 2y(t) \end{aligned}$$

con condiciones iniciales $x(0) = y(0) = 1$.

4. [2 Puntos] Se conectan en serie un inductor de $2H$, una resistencia de 4Ω y un condensador de $0.5F$ con una f.e.m. $E = 100 \text{ sen}(4t) \text{ V}$. Encontrar la corriente y la carga en cada instante $t > 0$ sabiendo que $q(0) = i(0) = 0$. Utilizar el método de los coeficientes indeterminados.
5. [1'5 Puntos] Desarrollar en serie de Fourier la función

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Utilizar el desarrollo en serie de Fourier para encontrar el valor de la suma de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

NOTA Transformadas de Laplace que pueden ser necesarias.

- $\mathcal{L}\{e^{at} \cos bt\} = \frac{s-a}{(s-a)^2 + b^2}$
- $\mathcal{L}\{e^{at} \sin bt\} = \frac{b}{(s-a)^2 + b^2}$
- $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$
- $\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{f(t)\}$
- $\mathcal{L}\{u(t-a)g(t)\} = e^{-as} \mathcal{L}\{g(t+a)\}$
- $\mathcal{L}\{-tf(t)\} = \frac{d}{ds} \mathcal{L}\{f(t)\}$