I.T. Informática de Gestión
Examen de Estadística (Convocatoria de junio)

Apellidos .... **Nombre** .... **DNI**..................... **Contenido** ....

Ejercicio 1. Un autobús pasa por una parada cada 8 minutos. Cuando un usuario llega a una parada, el tiempo (en minutos) que debe esperar es una variable aleatoria con función de densidad :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si} \quad x \in (0,8) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (0,8) \end{cases}$$

Sin embargo, si el autobús lleva retraso, el tiempo de espera es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1x} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Sabiendo que de cada 8 autobuses, tres llegan con retraso:

(a) Determinar la probabilidad de que un usuario que llega a la parada tenga que esperar más de 5 minutos.
(b) Si el usuario lleva esperando más de 5 minutos y el autobús no ha llegado aún, ¿cuál es la probabilidad de que venga con retraso?

Ejercicio 2. Sea X una variable aleatoria que mide el número de horas que trabaja en el ordenador una determinada persona de un colectivo, con distribución de probabilidad $P[X = k] = c(k^2 - 4)$, donde c es un parámetro positivo. Se sospecha que k puede valer 0, 1, 2, 3, 4, 5 ó 6.

1. ¿Son posibles todos los valores? Eliminando los que no lo sean, determinar c para que P sea una distribución de probabilidad.
2. Calcular la función de distribución, la esperanza y la varianza de X.
3. Se considera que una persona rinde cuando está al menos 4 horas trabajando. Si el colectivo está formado por 1000 personas, ¿cuál es la probabilidad de que rindan al menos 750 personas?

Ejercicio 3. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria simple procedente de una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 3 \\ \frac{\theta \cdot 3^\theta}{x^{\theta+1}} & \text{si} \quad x \geq 3 \end{cases}$$

donde $\theta > 1$ es un parámetro desconocido. Se pide:

(a) Determinar el estimador de máxima verosimilitud de θ.
(b) Sea $T(X_1, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$. s T un estimador suficiente para θ ?
(e) Calcular un estimador de θ usando para ello el método de los momentos.

Ejercicio 4. Un fabricante de automóviles debe elegir entre un determinado tipo de piezas de acero suministradas por un proveedor A y otras suministradas por otro proveedor B. Para proceder a la elección se ha analizado la resistencia a la tracción de las piezas suministradas por ambos proveedores, tomando una muestra de 10 piezas de A y otra muestra de 12 piezas de B. La resistencia media de la muestra A es de 54000 unidades y de la muestra B es de 49000 unidades, siendo las desviaciones típicas muestrales $S_A = 2100$ y $S_B = 1900$. Las resistencias de las piezas de ambos proveedores se distribuyen normalmente.

Las piezas del proveedor B son más baratas que las del proveedor A, por lo que estas últimas sólo son rentables si tienen una resistencia media al menos 2000 unidades mayor que las de B y la misma variabilidad.

1. ¿A qué proveedor habría que comprar las piezas en vista de los resultados muéstrales? (Tómese $\alpha = 0.05$ en los distintos contrastes).
2. Obtener un intervalo de confianza al 90% para la diferencia de medias de la resistencia de las piezas de los proveedores A y B.

1º parcial: ejercicios 1 y 2; cuestiones 1, 2, 3 y 4.
2° parcial: ejercicios 3 y 4; cuestiones 5, 6, 7 y 8.
Asignatura completa: ejercicios 1 y 4; cuestiones 2, 4, 5 y 6.

La Rábida 1-7-2002

Apellidos .... **Nombre** .... **DNI** .... **Contenido** ....

Cuestión 1: Si X es una variable aleatoria de Poisson de media λ, verificando que la probabilidad del 0 es igual a la suma de las probabilidades de todos los demás valores, ¿cuál es la varianza de X?

(a) 2 (b) $\ln 2$ (c) $2\ln 2$ (d) Ninguna de las anteriores

Justificación:

Cuestión 2: Un teatro con capacidad para 500 personas ha fijado el precio de la entrada en 12 € para los abonados y 15 € para los no abonados. Si en una función, en la que se ha llenado el teatro, la recaudación media ha sido de 13.08 € por persona, ¿qué porcentaje de abonados había?

(a) Entre el 40% *y* el 50% (b) Entre el 50% *y* el 60%
(c) Entre el 60% y el 70% (d) Más del 70%

Justificación:

Cuestión 3: Consideremos la función

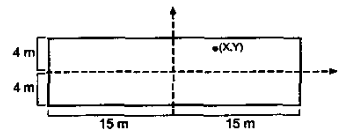
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{kx^2} & \text{si} \quad x \in (1,2) \\ 0 & \text{si} \quad x \notin (1,2) \end{cases}$$

Para que f sea función de densidad de una variable aleatoria, k debe ser:

(a) $2\ln 2$ (b) $^1/_2 + \ln 2$ (c) $^1/_2$ (d) Ninguna de las anteriores

Justificación:

Cuestión 4: Un bombardero vuela a lo largo de un puente de 30 metros de longitud y 8 metros de anchura. Las coordenadas X e Y del punto de impacto respecto al sistema de referencia indicado en la figura, son variables aleatorias independientes con distribución N(0, 36) y N(0,16), respectivamente.



Si se lanza una bomba, la probabilidad de impactar en el puente es:

(a) 0.25 (b) 0.9876 (c) 0.6741 (d) Ninguna de las anteriores

Justificación:

Apellidos .... **Nombre** .... **DNI** .... **Contenido** ....

Cuestión 5: Para estimar el parámetro λ de una variable aleatoria que sigue un modelo P(A) se toma una muestra aleatoria simple $X_1, \ldots, X_n$ y se utiliza el estimador $T = 2\overline{X} + S_c^2$. El sesgo de dicho estimador es:

(a) 0 (b) Mayor que λ (e) Menor que λ (d) Negativo

Justificación:

Cuestión 6: Se sabe que entre dos magnitudes X e Y existe una relación del tipo $y = ax + \xi$, con $\xi \sim N(0, \sigma^2)$. Si se dispone de un conjunto de observaciones $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, la estimación de a que se obtiene utilizando el método de mínimos cuadrados es:

(a) $\frac{S_{xy}}{S_x^2}$ **(b)** $\frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ **(c)** $\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i y_i}$ **(d) Ninguna de las anteriores**

Justificación:

Cuestión 7: Un fabricante de hilos de acero desea estimar la tensión de ruptura media de sus fibras. Para ello ha seleccionado aleatoriamente 16 hilos, experimentado las tensiones siguientes: 20.8, 20.6, 21, 20.9, 19.9, 20.2, 19.8, 19.6, 20.9, 21.1, 20.4, 20.6, 19.7, 19.6, 20.3, 20.7. Si suponemos que la tensión de ruptura de las fibras puede modelarse mediante una normal de varianza 0.2025, el intervalo de confianza al 98% para la tensión media de ruptura es:

(a) (20.05,20.64) (b) (20.12,21.64) (e) (20.05,20.71) (d) (20.12,20.64)

Indicación : Realizar los cálculos de forma exacta y redondear la solución a dos cifras decimales.

Justificación:

Cuestión 8: Existen en el mercado dos máquinas que se utilizan para producir un componente electrónico. El número de componentes que fabrican las máquinas hasta que sale una defectuosa sigue una distribución geométrica, de media 5 para la máquina más cara y 2 para la más barata. Queremos comprobar que la máquina que hemos comprado es del primer tipo. Para ello, planteamos el contraste $\{H_o : p = 0.2; H_1 : p = 0.5\}$, se fabrican piezas hasta que aparezca la primera defectuosa y se aplica la regla de decisión: Rechazar H_o si el número de piezas fabricadas, incluida la defectuosa, es menor que 3. Con esta regla de decisión, la probabilidad de cometer un error de tipo II es:

(a) 0.25 (b) 0.36 (e) 0.64 (d) Ninguna de las anteriores

Justificación: