I.T. Informática (Sistemas)

Diciembre 2003

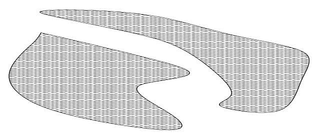
Cuestiones

NOTA:

• **Las cuestiones deben responderse <u>BREVEMENTE</u>. Salvo aquéllas que impliquen cálculos numéricos, las cuestiones se contestarán en un <u>MÁXIMO DE 5 LÍNEAS</u>.**

• **Las cuestiones suponen el 40 % de la nota del examen.**

1. ¿Cuándo se dice que dos conductores están en situación de influencia total? Si los conductores de la figura están cargados y en situación de influencia total, razona qué relación existe entre sus cargas y dibuja aproximadamente las líneas de campo resultantes.

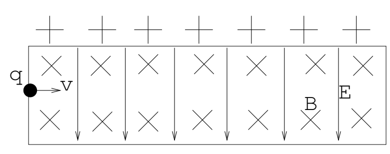


2. Un globo esférico tiene en su centro una partícula con carga Q. Si el globo se hincha hasta que su radio se duplica calcular cómo varían: (a) el potencial eléctrico en la superficie del globo, (b) el módulo del campo eléctrico en la superficie del globo, (c) la dirección y sentido del campo eléctrico en la superficie del globo y (d) el flujo del campo eléctrico a través del globo.

3. Se tiene un condensador plano formado por dos placas cuadradas de dimensiones 3 cm $\times$ 3 cm separadas por una lámina de teflón (constante dieléctrica $\kappa = 2{,}1$) de 1,5 mm de espesor. Calcular la capacidad del condensador y la carga máxima que puede almacenar si la ruptura dieléctrica (campo eléctrico máximo que puede soportar un material dieléctrico antes de covertirse en conductor) para el teflón se produce para un campo de 6×10^5 V/m.

4. ¿Cuándo es mayor la potencia que se disipa en una bombilla de filamento, (a) justo al encenderla, (b) cuando va aumentando el brillo de su filamento o (c) cuando ha alcanzado la situación estacionaria y el brillo no varía? [**Nota**.- Ten en cuenta que la bombilla puede considerarse como un conductor que ofrece cierta resistencia al paso de la corriente.]

5. Se llama selector de velocidad a un dispositivo en el cual mediante la acción simultánea de un campo eléctrico (E) y un campo magnético (B) uniformes y perpendiculares entre sí se consigue que lo atraviesen sólamente partículas con cierta velocidad v. Dado el selector de la figura dibuja las fuerzas que actúan sobre la partícula cargada ($q > 0$) y calcula la velocidad de las partículas que atraviesan el detector sin desviarse.



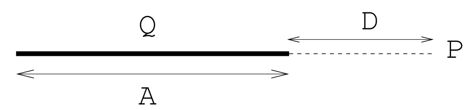
6. ¿Cómo se comportan en un circuito de corriente continua un condensador y una bobina en $t = 0$ s y en régimen estacionario?

7. La corriente inversa de saturación de un diodo de silicio es de 10 nA a $T = 300$ K, y su tensión equivalente $V_T = 0{,}026$ V a esta temperatura. Calcula el valor del potencial en polarización directa aplicado para que una corriente de 10 mA atraviese el diodo.

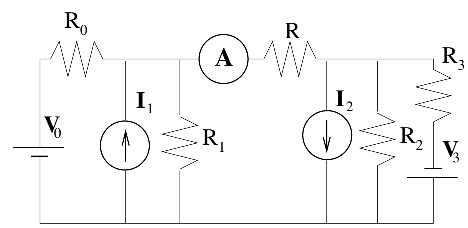
8. Explica razonadamente cómo se origina el potencial de contacto en un diodo de unión PN.

• Los problemas suponen el 60 % de la nota del examen. Al final de cada problema se indica su puntuación (sobre 10 puntos). Hacer SÓLO uno de los dos problemas 4.1 ó 4.2.

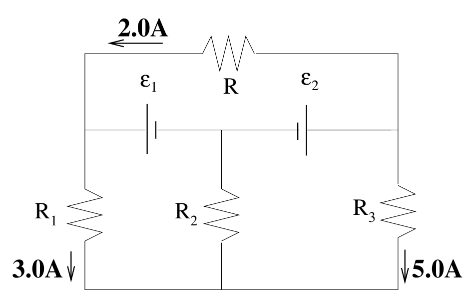
PROB. 1.– Una carga eléctrica Q está distribuida de manera uniforme en una varilla delgada de longitud A. Considerando que el valor del potencial en el infinito es cero, $V(\infty) = 0$, hallar el valor del potencial en un punto P a una distancia D de la varilla (ver figura). ¿A qué se reduce el resultado si $D >> A$?
(**1.5 puntos**).



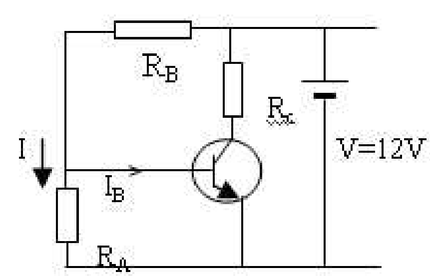
PROB. 2.– Un conductor tiene una sección transversal cuadrada de 2,0 mm de lado y una longitud de 15 m, siendo la resistencia entre sus extremos $R = 0{,}0625\,\Omega$. Hallar: (a) Resistividad del material, (b) si el campo eléctrico en el conductor es 1,25 V/m, ¿cuál es la corriente total?, (c) si el material posee $8{,}25 \times 10^{28}$ electrones libres por metro cúbico hallar la velocidad de arrastre o deriva de los electrones en las condiciones del apartado (b).
(**1.5 puntos**).



PROB. 3.– Determinar la lectura del amperímetro de la figura usando el método de las mallas y el método de los nudos. Datos: $V_0 = 6$ V, $V_3 = 6$ V, $I_1 = 10$ A, $I_2 = 5$ A, $R_0 = 6\,\Omega$, $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$, $R_3 = 4\,\Omega$ y $R = 3\,\Omega$.
(**2 puntos**).



PROB. 4.1– En el circuito de la figura halle la corriente en la resistencia R_2, las f.e.m. desconocidas ε_1 y ε_2 y el valor de la resistencia R. Datos: $R_1 = 4{,}0\,\Omega$, $R_2 = 3{,}0\,\Omega$, $R_3 = 6{,}0\,\Omega$.
(**1 punto**)



PROB. 4.2– En el circuito de la figura la corriente $I = 100$ mA, la resistencia interna base-emisor es $R_{BE} = 200\,\Omega$, la tensión $V_{CE} = 8$ V, $V_{BE} = 0{,}8$ V y $\beta = 50$. Hallar los valores de R_A, R_B y R_C.
(**1 punto**)

Tomemos como eje Ox un eje que coincida con la varilla, estando el origen O en uno de los extremos de la misma. Sea dq un elemento (infinitesimal) de carga de la varilla situado a una distancia x del origen O. La densidad (lineal) de carga de la varilla es $\lambda = Q/A$, donde A es la longitud de la varilla, por lo que $dq = \lambda dx = (Q/A)dx$. La distancia ($d$) de dq al punto P es $d = A + D - x$, donde D es la distancia de P al otro extremo de la varilla. Considerando dq como una carga puntual, el potencial dV debido a dq en P es:

$$dV = K\,\frac{dq}{d} = K\,\frac{(Q/A)dx}{A+D-x}$$

donde K es la constante electrostática. Integrando la anterior expresión a lo largo de la varilla ($0 \leq x \leq A$):

$$V = K\,\frac{Q}{A}\int_0^A \frac{dx}{A+D-x} = -K\,\frac{Q}{A}\,\ln(A+D-x)\Big|_{x=0}^{x=A} = -K\,\frac{Q}{A}\,[\ln(A+D-A) - \ln(A+D)]$$

Por tanto, el potencial en función de la distancia D viene dado por:

$$V(D) = K\,\frac{Q}{A}\ln\left(\frac{A+D}{D}\right) + \mathcal{C} = K\,\frac{Q}{A}\ln\left(1+\frac{A}{D}\right) + \mathcal{C}$$

donde $\mathcal{C}$ es una constante de integración cuyo valor obtendremos siempre que conozcamos el valor del potencial en algún punto del espacio (condición de contorno). Dado que nos dicen que para $D \to \infty$ el potencial se anula, haciendo $D = \infty$ en la expresión anterior e igualando a cero, obtenemos:

$$0 = K\,\frac{Q}{A}\ln\left(1+\frac{A}{\infty}\right) + \mathcal{C} \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{C} = 0$$

Por tanto,

$$\boxed{V(D) = K\,\frac{Q}{A}\ln\left(1+\frac{A}{D}\right)} \tag{1}$$

Para valores muy pequeños de x ($x << 1$) podemos hacer la aproximación $\ln(1+x) \approx x$. Si $D >> A$ se verifica que $A/D << 1$, por lo que podemos hacer la aproximación $\ln(1 + A/D) \approx A/D$ en la expresión general (1), quedando:

$$V(D) \approx K\,\frac{Q}{A}\,\frac{A}{D} = K\,\frac{Q}{D} \qquad \text{siempre que } D >> A$$

La anterior expresión nos dice que a distancias D suficientemente grandes, la varilla equivale a una carga puntual de valor igual a la carga Q de la varilla.

PROB 2

(a) La expresión de la resistencia R de un hilo conductor de longitud L y sección S viene dada por

$$R = \rho\,\frac{L}{S}$$

donde ρ es la resistividad del material conductor. Despejando de la expresión anterior y sustituyendo (notar que $S = 4\ \text{mm}^2 = 4 \times 10^{-6}\ \text{m}^2$):

$$\rho = \frac{RS}{L} = \frac{0{,}0625 \times 4 \times 10^{-6}}{15} \qquad \boxed{\rho = 1{,}67 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}}$$

(b) La relación entre la densidad de corriente (J) y el campo eléctrico (E) viene dada por la ley de Ohm, $J = \sigma\,E$, donde σ es la conductividad del material conductor. Recuerda que σ es el inverso de la resistividad ($\sigma = 1/\rho$), por lo que:

$$J = \sigma\,E = \frac{1}{\rho}\,E = \frac{1{,}25}{1{,}67 \times 10^{-8}} = 7{,}5 \times 10^7\ \text{A/m}^2$$

$$J = \frac{I}{S} \quad \Longrightarrow \quad I = J\,S = 7{,}5 \times 10^{7} \times 4 \times 10^{-6} \qquad \boxed{I = 300\ \mathrm{A}}$$

(c) La velocidad de arrastre (v_a) de los electrones es proporcional al campo eléctrico E, siendo μ (movilidad) la constante de proporcionalidad; por tanto, $v_a = \mu\,E$. Para obtener el valor de μ, recordemos que la conductividad se define como $\sigma = n\,e\,\mu$, donde n es la densidad de portadores y e el valor de la carga fundamental. Por tanto:

$$\sigma = n\,e\,\mu \quad \Longrightarrow \quad \mu = \frac{\sigma}{n\,e} = \frac{1}{\rho\,n\,e} \quad \Longrightarrow \quad v_a = \frac{1}{\rho\,n\,e}\,E$$

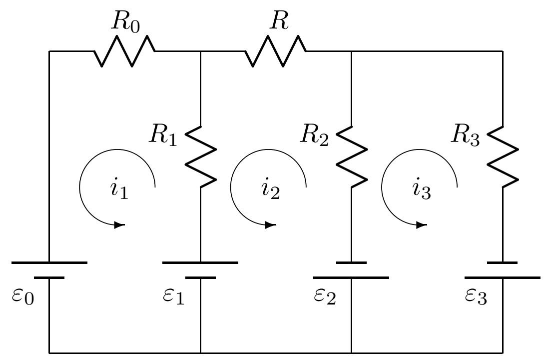
Sustituyendo,

$$v_a = \frac{1{,}25}{1{,}67 \times 10^{-8} \times 8{,}25 \times 10^{28} \times 1{,}6 \times 10^{-19}} \qquad \boxed{v_a = 5{,}67 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s}}$$

PROB 3

La intensidad I_A que pasa por el amperímetro coincide con la que pasa por la resistencia R.

(a) Método de mallas



Si aplicamos el método de mallas, hemos de sustituir todos los generadores de intensidad por generadores (equivalentes) de tensión. Recordemos que un generador de intensidad de parámetros I, r equivale a un generador de tensión ε, r donde $\varepsilon = I\,r$. El sentido (polaridad) de dicho generador de tensión viene dado por el sentido de la corriente del generador de intensidad. Por tanto, el circuito del problema equivale al circuito del esquema adjunto, donde $\varepsilon_1 = I_1\,R_1 = 10 \times 2 = 20$ V y $\varepsilon_2 = I_2\,R_2 = 5 \times 5 = 25$ V y con la polaridad indicada en el esquema.

Se tienen tres mallas. Consideramos sentido antihorario para las corrientes de malla (i_1, i_2, i_3). La ecuación matricial del circuito es:

$$\begin{pmatrix} R_0 + R_1 & -R_1 & 0 \\ -R_1 & R + R_1 + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_0 \\ -\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo,

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -45 \\ 19 \end{pmatrix}$$

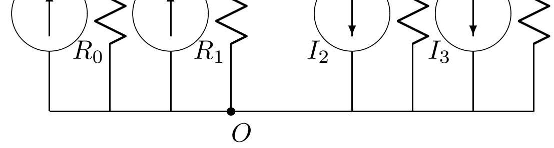
Del anterior sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, nos interesa únicamente i_2, ya que corresponde a la intensidad que pasa por el amperímetro. Aplicando, por ejemplo, la regla de Cramer:

$$i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 14 & 0 \\ -2 & -45 & -5 \\ 0 & 19 & 9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -2 & 0 \\ -2 & 10 & -5 \\ 0 & -5 & 9 \end{vmatrix}} = \frac{-2228}{484} = \frac{-557}{121}\ \mathrm{A} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_A \equiv i_2 = -4{,}60\ \mathrm{A}}$$

donde el signo menos indica que la corriente circula en sentido horario (esto es, en sentido contrario al que habíamos supuesto).

(b) Método de nudos

El generador de tensión (ε_0, R_0) equivale a uno de intensidad de parámetros (I_0, R_0), con $I_0 = \varepsilon_0/R_0 = 6/6 = 1$ A; el generador de tensión (ε_3, R_3) equivale a uno de intensidad de parámetros (I_3, R_3), con $I_3 = \varepsilon_3/R_3 = 6/4 = 3/2$ A. El circuito del problema equivale al circuito del esquema adjunto. En este circuito distinguimos tres nudos (designados por O, A y B en el esquema). Tomamos, por ejemplo, el O como nudo de referencia, con lo que al aplicar el método nos quedan dos nudos (A y B) independientes.



Tendremos que plantear, por tanto, un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, siendo las incógnitas las tensiones V_A y V_B en los nudos A y B (recuerda que las incógnitas en este método representan, realmente, las ddp entre los respectivos nudos y el de referencia: $V_A \equiv V_A - V_O$ y $V_B \equiv V_B - V_0$). La ecuación matricial del circuito es:

$$\begin{pmatrix} G_0 + G_1 + G & -G \\ -G & G + G_2 + G_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_0 + I_1 \\ -I_2 - I_3 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} 1/6 + 1/2 + 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/3 + 1/5 + 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -13/2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -1/3 & 47/60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_A \\ V_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -13/2 \end{pmatrix}$$

Resolviendo, se obtiene:

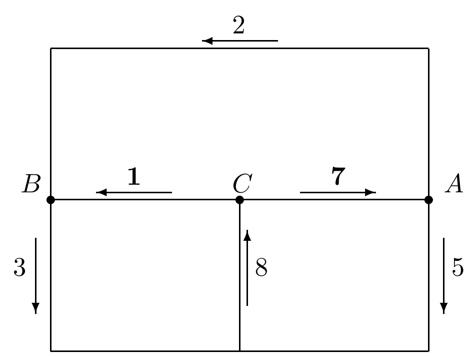
$$V_A = \frac{1161}{121}\ \text{V} \qquad V_B = \frac{-510}{121}\ \text{V} \qquad \Longrightarrow \qquad V_A - V_B = \frac{1671}{121}\ \text{V}$$

Dado que entre A y B tenemos una resistencia $R = 3\,\Omega$, la intensidad que pasa por R (y, por tanto, a través del amperímetro) es:

$$I_A = \frac{V_A - V_B}{R} = \frac{1671/121}{3} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{I_A = \frac{557}{121} = 4{,}60\ \text{A}} \tag{2}$$

Dado que $V_A > V_B$, la corriente circula en el sentido $A \to B$. Obviamente, se obtiene el mismo resultado que el obtenido por el método de mallas.

PROB 4.1



El circuito consta de tres mallas. Las intensidades que nos dan como datos se corresponden con las intensidades de malla, por lo que las intensidades que pasan por cada rama se pueden obtener de forma inmediata sin más que establecer el correspondiente diagrama de intensidades del circuito (esto es, aplicando la ley de los nudos, o primera ley de Kirchhoff a cada nudo). Designamos por I_{ε_1}, I_{ε_2} e I_{R_3} a las intensidades que pasan por ε_1, ε_2 y R_3, respectivamente, y aplicamos la primera ley de Kirchhoff a los nudos A, B y C, tomando como positivas las intensidades que llegan a un nudo y negativas aquéllas que salen del mismo:

$$\text{nudo A} \qquad I_{\varepsilon_2} - 2 - 5 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{I_{\varepsilon_2} = 7\ \text{A}}$$

$$\text{nudo B} \qquad I_{\varepsilon_1} + 2 - 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{I_{\varepsilon_1} = 1\ \text{A}}$$

$$\text{nudo C} \qquad I_{R_2} - 1 - 7 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{I_{R_2} = 8\ \text{A}}$$

Para calcular los valores de R, ε_1 y ε_2 utilizaremos dos procedimientos.

<u>Método 1</u>

$$\left.\begin{array}{l}\text{camino de arriba} \rightarrow V_A - V_B = I_R R = 2R \\ \text{camino de abajo} \rightarrow V_A - V_B = I_{R_3} R_3 - I_{R_1} R_1 = 5 \times 6 - 3 \times 4 = 18 \text{ V}\end{array}\right\} \quad 2R = 18 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{R = 9\,\Omega}$$

Calculemos la ddp entre B y C. Según el esquema del circuito, $V_B - V_C = \varepsilon_1$. Por otra parte, si vamos por el camino de abajo,

$$\left.\begin{array}{l}V_B - V_C = I_{R_1} R_1 + I_{R_2} R_2 = 3 \times 4 + 8 \times 3 = 36 \text{ V} \\ V_B - V_C = \varepsilon_1\end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\varepsilon_1 = 36 \text{ V}}$$

Por último, la ddp entre A y C, según el esquema del circuito, es $V_A - V_C = \varepsilon_2$. Por otra parte, usando los valores obtenidos anteriormente, se tiene que $V_A - V_C = (V_A - V_B) + (V_B - V_C) = 18 + 36 = 54$ V, por lo que:

$$\boxed{\varepsilon_2 = 54 \text{ V}}$$

<u>Método 2</u> Planteamos la ecuación matricial del circuito (tres mallas). Tomamos sentido antihorario para las corrientes de malla:

$$\begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R_1 + R_2 & -R_2 \\ 0 & -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo los datos conocidos (recuerda que las intensidades que se proporcionan en el enunciado corresponden a las intensidades de malla):

$$\begin{pmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ -\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

El anterior sistema (de tres ecuaciones con tres incógnitas) equivale a:

$$\begin{aligned} -2R &= \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \\ -21 - 15 &= -\varepsilon_1 \\ 9 + 45 &= \varepsilon_2 \end{aligned}$$

de donde se obtienen directamente los valores pedidos: $\varepsilon_1 = 36$ V, $\varepsilon_2 = 54$ V y $R = 18\ \Omega$.