# Examen de Matemática Discreta. I.T.Informática de Sistemas

1. (1.25 puntos) A un concurso literario se presentan 800 manuscritos. En una primera selección se eliminan más de 300. Se pretende almacenar los manuscritos eliminados en cajas de la misma capacidad y de manera que todas las cajas estén completas. En principio se preparan cajas con capacidad para 6 manuscritos, pero sobran 3, de modo que se toman cajas mayores que contengan 7 manuscritos cada una, pero entonces sobran 5. Se toman cajas aún mayores que contengan 11 manuscritos cada una y en este caso no sobra ninguno. ¿Cuántos manuscritos han sido eliminados? ¿cuántos quedan en concurso?

2. (1.25 puntos) Al ayudar a los estudiantes en sus cursos de programación, Juan observa que tarda 6 minutos en depurar un programa en Delphi y 10 minutos en depurar un programa escrito en $C^{++}$. Si ha trabajado de forma continuada durante 108 minutos y no ha desperdiciando tiempo, ¿cuántos programas ha depurado en cada lenguaje, sabiendo que ha depurado más programas en $C^{++}$ que en Delphi?

3. (1 punto) Demostrar por inducción que $2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}$ para todo $n \geq 1$.

4. (1.5 puntos) Encontrar el término general de la recurrencia dada por:

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 1, \quad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 5 \cdot 2^n \quad n \geq 3$$

5. (1 punto) ¿De cuántas formas se pueden colocar 8 peones (iguales) en un tablero de ajedrez de 8x8 casillas de manera que no haya dos ni en la misma fila ni en la misma columna? ¿Y 5 peones?

6. (1 punto) Sea $n$ un número natural. Calcular las dos últimas cifras del número $349^{120n+5} - 300n + 220$.

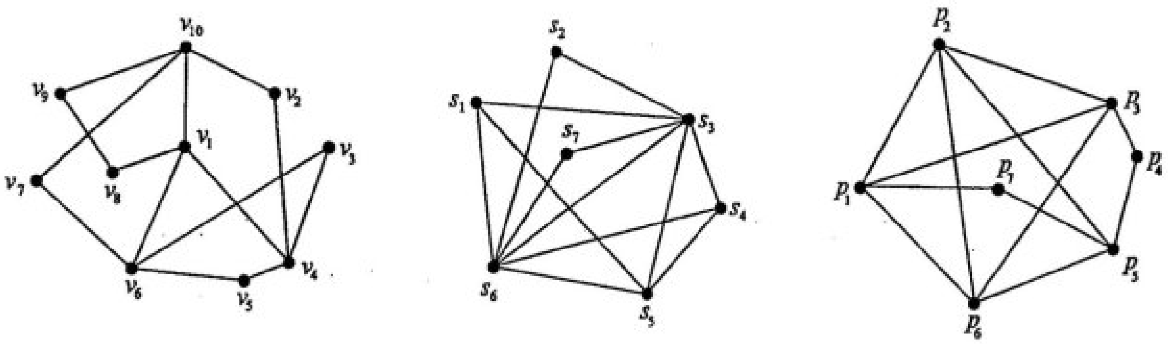
7. Tenemos 20 bolas iguales para repartir en 4 cajas numeradas.

   (a) (0.5 puntos) ¿De cuántas formas se puede hacer el reparto de manera la caja 1 quede vacía, la caja 2 tenga exactamente 3 bolas y cada una de las restantes contenga al menos dos bolas?

   (b) (0.5 puntos) Calcular el número de formas de repartir las bolas en las cajas de forma que al menos dos cajas queden vacías.

8. La plantilla de una empresa consta de 25 miembros. Diez de ellos trabajan en el departamento de ventas, $v_1, \ldots, v_{10}$; siete en el de servicios, $s_1, \ldots, s_7$; siete en el de proyectos, $p_1, \ldots, p_7$; y un director general $d$ lo dirige todo. Los empleados $v_1$, $s_1$, y $p_1$ son los directores de sus respectivos departamentos.

   Cada empleado dispone de un ordenador, estando éstos conectados mediantes cables de red del siguiente modo: el director general está conectado a cada uno de los directores de departamento, $s_1$ está conectado con $v_1$ y con $p_1$, y los empleados de cada departamento están conectados entre sí como se representa en los siguientes grafos:




   (a) (0.5 puntos) En el departamento de proyectos, ¿podría su director enviar un mensaje de forma que pase de un empleado a otro sucesivamente y vuelva a él, sin que pase dos veces por el mismo empleado? Razonar la respuesta.

   (b) (0.5 puntos) ¿Es bipartito el grafo que representa la red del departamento de ventas? Razonar la respuesta.

   (c) (0.5 puntos) ¿Puede dibujarse en un plano el grafo que representa la red del departamento de servicios de forma que no se crucen entre sí las líneas que representan los cables? En caso afirmativo, dibuja un esquema de dicha red que verifique esa condición.

   (d) (0.5 puntos) Considérese el grafo que representa toda la red de la empresa. ¿Podría un mensaje recorrer todos los cables de red de la empresa sin pasar dos veces por el mismo tramo y comenzando y terminando en el mismo ordenador? ¿Y comenzando y terminando en distintos ordenadores? Razonar las respuestas.

13 de Junio de 2005

1) Sea $x$: nº de manuscritos eliminados $300 < x \leq 800$

Además, $x$ es una solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x \equiv 3 \pmod 6 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \\ x \equiv 0 \pmod{11} \end{array}\right\}$$

$m_1 = 6$, $m_2 = 7$, $m_3 = 11$

Este sistema verifica las condiciones para aplicar el Teorema Chino del Resto ya que los $m_i$ son primos entre sí dos a dos y en cada ecuación el coeficiente de la $x$ es primo con el módulo.

El teorema nos dice que las soluciones del sistema son de la forma $x = x_0 + \lambda \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot m_3$ con $\lambda \in \mathbb{Z}$ donde $x_0$ es una solución particular del sistema.

Cálculo de $x_0$:

$$x_0 = t_1 \cdot y_1 \cdot x_1 + t_2 \cdot y_2 \cdot x_2 + t_3 \cdot y_3 \cdot x_3 = 2805$$

$m = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 = 6 \cdot 7 \cdot 11 = 462$

$\underline{t_1} = \frac{m}{m_1} = 77$; $y_1$ es una solución de la ecuación $t_1 \cdot x \equiv 1 \pmod{m_1}$

$77x \equiv 1 \pmod 6 \Leftrightarrow 5x \equiv 1 \pmod 6$. Tomamos $\underline{y_1 = 5}$; $x_1$ es

$77 \equiv 5 \pmod 6$

una solución de la ecuación $x \equiv 3 \pmod 6$. Tomamos $\underline{x_1 = 3}$.

$\underline{t_2} = \frac{m}{m_2} = 66$; $66x \equiv 1 \pmod 7 \Leftrightarrow 3x \equiv 1 \pmod 7$. Tomamos $\underline{y_2 = 5}$; $x_2$ es una solución de $x \equiv 5 \pmod 7$. Tomamos $\underline{x_2 = 5}$.

$\underline{t_3 = 42}$; $42x \equiv 1 \pmod{11} \Leftrightarrow 9x \equiv 1 \pmod{11}$. Tomamos $\underline{y_3 = 5}$; $x_3$ es una solución de $x \equiv 0 \pmod{11}$. Tomamos $\underline{x_3 = 0}$.

Por tanto, las soluciones del sistema son

$$x = 2805 + \lambda \cdot 462 \qquad \lambda \in \mathbb{Z}$$

Buscamos la solución $x$ que verifica $300 < x \leq 800$

$$300 < 2805 + \lambda \cdot 462 \leq 800 \Leftrightarrow -2505 < \lambda \cdot 462 \leq -2005$$

$$\Leftrightarrow \underset{\lambda \in \mathbb{Z}}{-\frac{2505}{462} < \lambda \leq -\frac{2005}{462}} \Leftrightarrow \underset{\lambda \in \mathbb{Z}}{-5'4\ldots < \lambda \leq -4'3\ldots}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\lambda = -5} \Rightarrow \boxed{x = 495}$$

Se eliminan 495 manuscritos y quedan en concurso 305

2) $x$: nº programas en Delphi depurados

$y$: " " " C++ "

$x \geq 0$, $y \geq 0$ $\quad y > x$

$$6x + 10y = 108 \Leftrightarrow 3x + 5y = 54$$

Resolvemos la ecuación diofántica $3x + 5y = 54$.

Esta ecuación tiene soluciones enteras porque $mcd(3,5) = 1$ y $1 \mid 54$. Sus soluciones son de la forma:

$$\left.\begin{array}{l} x = x_0 + 5t \\ y = y_0 - 3t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{Z}$$

donde $(x_0, y_0)$ es una solución particular.

Cálculo de $(x_0, y_0)$:

| | |
|---|---|
| $mcd(3,5) = 1$ | $1 = 3 - 2 = 3 - (5 - 3) = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 5$ |
| $5 = 1 \cdot 3 + 2$ | $\Rightarrow 54 = 108 \cdot 3 + (-54) \cdot 5$ |
| $3 = 1 \cdot 2 + 1$ | |

$$\Rightarrow (x_0, y_0) = (108, -54)$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = 108+5t \\ y = -54-3t \end{array} \quad t \in \mathbb{Z}$$

Buscamos $(x,y)$ tales que $x \geq 0$, $y \geq 0$, $y > x$

$x \geq 0 \Leftrightarrow 108+5t \geq 0 \Leftrightarrow \underset{t\in\mathbb{Z}}{t \geq -\frac{108}{5}} \Leftrightarrow \underline{t \geq -21}$

$y \geq 0 \Leftrightarrow -54-3t \geq 0 \Leftrightarrow \underset{t\in\mathbb{Z}}{t \leq -\frac{54}{3}} \Leftrightarrow \underline{t \leq -18}$

$y > x \Leftrightarrow -54-3t \geq 108+5t \Leftrightarrow -162 \geq 8t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \underset{t\in\mathbb{Z}}{t \leq -\frac{162}{8}} \Leftrightarrow \underline{t \leq -21}$

Por tanto, $t = -21 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 9 \end{array}}$

3) $\underline{n=1}$ En efecto, $2 = \frac{(2\cdot 1)!}{1!}$

$\underline{n \Rightarrow n+1}$ Suponemos que $\boxed{2\cdot 6\cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n-2) = \frac{(2n)!}{n!}}$ Hipótesis de inducción

Tenemos que demostrar que

$$2\cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4(n+1)-2) = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!}$$

$$\boxed{2\cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4(n+1)-2)} = 2\cdot 6 \cdot \ldots \cdot (4n-2)\cdot(4(n+1)-2) =$$

$$\underset{H.I}{=} \frac{(2n)!}{n!}(4(n+1)-2) = \frac{(2n)!\,(4n+2)}{n!} = \frac{(2n)!\cdot 2\cdot(2n+1)}{n!} =$$

$$= \frac{(2n)!\,2\cdot(2n+1)\cdot(n+1)}{n!\,(n+1)} = \frac{(2n)!\,(2n+1)\cdot(2n+2)}{(n+1)!} = \boxed{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!}}$$

multiplicamos numerador y denominador por $n+1$

4) $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ $\quad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2} + 5\cdot 2^n$, $\quad n \geq 3$

Es una recurrencia lineal no homogénea de orden 2 con coeficientes constantes.

$u_n = h_n + p_n$ donde $h_n$ es la solución general de la recurrencia homogénea asociada y $p_n$ es una solución particular de la no homogénea.

Cálculo de $h_n$:

La recurrencia homogénea asociada es: $u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$

$\Leftrightarrow u_n - 5u_{n-1} + 6u_{n-2} = 0$

Ecuación característica: $t^2 - 5t + 6 = 0$

Raíces: $\alpha_1 = 2$ de multiplicidad $m_1 = 1$

$\alpha_2 = 3$ " " $m_2 = 1$

$\Rightarrow h_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n \quad A, B \in \mathbb{R}$.

Cálculo de $p_n$:

El término no homogéneo de la recurrencia es

$f(n) = \underbrace{5}_{q(n)} \cdot \underbrace{2^n}_{b^n}$ donde $b=2$ es raíz de la ecuación característica de la homogénea asociada con multiplicidad $m=1$

$q(n)$ polinomio grado cero

Buscamos entonces $p_n$ de la forma:

$$p_n = \underset{\text{pol. grado cero}}{C} \cdot \underset{n^m}{n^1} \cdot \underset{b^n}{2^n} = C\cdot n \cdot 2^n$$

Ha de verificarse que:

$$p_n = 5\cdot p_{n-1} - 6\,p_{n-2} + 5\cdot 2^n \quad \forall n$$

$$C\cdot n\cdot 2^n = 5\cdot C\cdot(n-1)\cdot 2^{n-1} - 6\cdot C\cdot(n-2)\,2^{n-2} + 5\cdot 2^n$$

$$\Rightarrow C\cdot n\cdot 2^n = \frac{5}{2}\cdot C(n-1)\,2^n - \frac{6}{4}\cdot C\cdot(n-2)\cdot 2^n + 5\cdot 2^n$$

$$\Rightarrow C\cdot n = \frac{5}{2}C(n-1) - \frac{6}{4}\cdot C(n-2) + 5$$

$$\Rightarrow Cn = \frac{5}{2}C\cdot n - \frac{5}{2}C - \frac{6}{4}\cdot C\cdot n + 3C + 5$$

$$\Rightarrow \cancel{Cn} = \cancel{Cn} + \frac{1}{2}C + 5 \Rightarrow \frac{1}{2}C + 5 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{C = -10} \Rightarrow P_n = -10\cdot n\cdot 2^n$$

Por tanto, $u_n = A\cdot 2^n + B\cdot 3^n - 10\cdot n\cdot 2^n$

$$\left.\begin{array}{ll} u_1 = 0 \Rightarrow & 0 = A\cdot 2 + B\cdot 3 - 20 \\ u_2 = 1 \Rightarrow & 1 = A\cdot 4 + B\cdot 9 - 80 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} A = -\frac{21}{2} \\ B = \frac{41}{3} \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = -\frac{21}{2}2^n + \frac{41}{3}\cdot 3^n - 10\cdot n\cdot 2^n \quad n\geq 1}$$

|||

$$\boxed{u_n = -21\cdot 2^{n-1} + 41\cdot 3^{n-1} - 20n\cdot 2^{n-1} = 41\cdot 3^{n-1} - (21+20n)\,2^{n-1} \quad n\geq 1}$$

5) $\boxed{\text{8 peones}}$ Está claro que ha de haber uno y sólo un peón en cada fila. Como los peones son iguales, el problema se reduce a elegir en cada fila la columna dónde vamos a colocar el peón, de manera que no se repitan columnas en la elección. Por tanto, cada forma de colocar los peones equivale a una ordenación de las 8 columnas. La respuesta es:

$$P_8 = V_{8,8} = 8! = \boxed{40320}$$

$\boxed{\text{5 peones}}$ Ahora se van a ocupar 5 filas.

nº formas de elegir las 5 filas: $C_{8,5} = \binom{8}{5} = \frac{8!}{5!3!} = 56$

nº formas de colocar los 5 peones en las filas elegidas de manera que no haya dos ni en la misma fila ni en la misma columna: $V_{8,5} = 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 6720$

Por tanto, nº formas de colocar los 5 peones: $\binom{8}{5}\cdot V_{8,5} = 56\cdot 6720 = \boxed{376320}$

6) Nos piden calcular el resto de la división de $349^{120n+5} - 300n + 220$ por 100, es decir, buscamos $r$ tal que $0 \leq r < 100$ y que verifique:

$$349^{120n+5} - 300n + 220 \equiv r \pmod{100}$$

---

$349 \equiv 49 \pmod{100}$, $300 \equiv 0 \pmod{100}$, $220 \equiv 20 \pmod{100}$

$$349^{120n+5} - 300n + 220 \equiv 49^{120n+5} + 20 \pmod{100}$$

$$49^{120\cdot n+5} = (49^{120})^n\cdot 49^5$$

$mcd(49,100) = 1 \underset{\text{T. Euler}}{\Rightarrow} 49^{\phi(100)} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 49^{40} \equiv 1 \pmod{100}$

$\phi(100) = 100\cdot(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5}) = 40$, $100 = 2^2\cdot 5^2$

$\Rightarrow (49^{120})^n \equiv (1^3)^n \equiv 1 \pmod{100}$, $49^{120} = (49^{40})^3$, $120 = 3\cdot 40$

$$\Rightarrow 49^{120n+5} \equiv 49^5 \pmod{100}$$

$49^5 \equiv 49 \pmod{100}$

$\uparrow$

$49^5 = 282475249$

Por tanto, $349^{120n+5} - 300n + 220 \equiv 49^{120n+5} + 20 \equiv$

$\equiv 49^5 + 20 \equiv 49 + 20 \equiv 69 \pmod{100}$

$\Rightarrow \boxed{r = 69}$

7) Sabemos que $CR_{n,m} \equiv$ nº formas de repartir $m$ objetos iguales en $n$ cajas distintas.

a) Como la caja 1 ha de estar vacía, la caja 2 con exactamente 3 bolas y las cajas 3 y 4 con al menos dos bolas, las formas de hacerlo es igual a las formas de repartir $m = 20-3-2-2 = 13$ bolas iguales en $n=2$ cajas distintas (las cajas 3 y 4)

$$\Rightarrow CR_{2,13} = \binom{2+13-1}{13} = \binom{14}{13} = \boxed{14}$$

b) Sean $\mathcal{U} \equiv$ repartos de las 20 bolas en las 4 cajas

$A \equiv$ repartos tales que haya al menos dos cajas vacías

$V_i \equiv$ " " " haya exactamente $i$ cajas vacías, $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

1ª forma:

$$|A| = |\mathcal{U}| - |V_0| - |V_1| = CR_{4,20} - CR_{4,16} - \underbrace{4}_{\text{nº formas de elegir la caja vacía}} \cdot CR_{3,17} =$$

$$= \binom{4+20-1}{20} - \binom{4+16-1}{16} - 4\cdot\binom{3+17-1}{17} = \binom{23}{20} - \binom{19}{16} - 4\cdot\binom{19}{17} = \boxed{118}$$

2ª forma:

$$|A| = |V_2| + |V_3| + \cancel{|V_4|}^{\,0} = \binom{4}{2}\cdot CR_{2,18} + \binom{4}{3}\cdot CR_{1,19} =$$

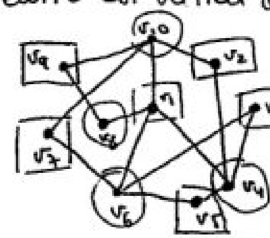
$$= 6\cdot\binom{2+18-1}{18} + 4\cdot\binom{1+19-1}{19} = 6\cdot\binom{19}{18} + 4\cdot\binom{19}{19} = 6\cdot 19 + 4\cdot 1 = \boxed{118}$$

8) a) Nos preguntan si el grafo que representa la red del departamento de proyectos es hamiltoniano, es decir, si existe en él un ciclo que contenga a todos los vértices. La respuesta es sí. Un ciclo hamiltoniano en ese grafo es: $(P_1, P_2, P_6, P_3, P_4, P_5, P_7, P_1)$

b) El grafo que representa la red del departamento de ventas sí es bipartito ya que su conjunto de vértices $V = \{v_1, \longrightarrow v_{10}\}$ se puede expresar como $V = X \cup Y$, con $X \neq \emptyset$, $Y \neq \emptyset$, $X \cap Y = \emptyset$, de manera no existe en el grafo ninguna arista entre dos vértices de $X$ ni entre dos vértices de $Y$. Los conjuntos $X$ e $Y$ son:

$X$: □

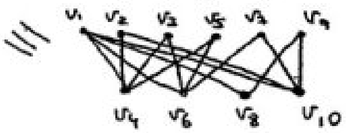
$Y$: ○



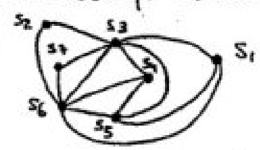
$X = \{v_1, v_2, v_3, v_5, v_7, v_9\}$

$Y = \{v_4, v_6, v_8, v_{10}\}$

$\cong$




c) Nos preguntan si el grafo que representa la red del departamento de servicios es plano. La respuesta es sí, ya que el siguiente dibujo es una inmersión plana del mismo:




d) En el grafo que representa la red de toda la empresa tenemos: $\delta(d)=3$; $\delta(v_1)=6$; $\delta(s_1)=6$; $\delta(p_1)=6$; el resto de vértices tienen valencia par excepto $s_4$ que tiene valencia 3.

La primera pregunta equivale a preguntarse si en dicho grafo existe un circuito euleriano. La respuesta es no porque no todos los vértices tienen valencia par. La segunda pregunta equivale a preguntarse si el grafo tiene un recorrido euleriano. La respuesta es sí porque tiene exactamente dos vértices de valencia impar (que son $d$ y $s_4$) y todas las aristas están en la misma componente conexa.

DIBUJO DEL GRAFO DE TODA LA RED DE LA EMPRESA